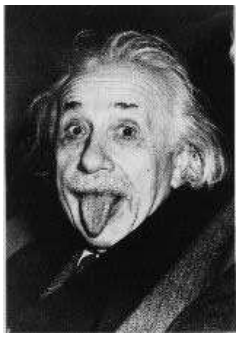

Mechanik II Übungen 01

Zwangsbedingungen, Zwangskräfte, Lagrange Gleichungen 1. Art

1. Bewegung im Schwerefeld entlang einer beliebigen Kurve

   Ein Massenpunkt der Masse m bewege sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft (Schwerkraft) $\vec{F}_g = mg(0, -1)$ in der (vertikalen) (x, y)-Ebene entlang der Kurve $y = f(x)$. (Die Einschränkung auf die Ebene $z = 0$ ist, wie wir gesehen haben, unproblematisch und wird vorausgesetzt.)

   (a) Formuliere die zugehörige Zwangsbedingung $G(x, y) = 0$.

   (b) Stelle die Lagrange Gleichungen 1. Art auf.

   (c) Bestimme aus der Bedingung $\ddot{G}(x(t), y(t)) = 0$ die Funktion $\lambda(t)$ und daraus die Komponenten der Zwangskraft $\vec{Z}$.

   (d) Eliminiere jetzt $\lambda(t)$ aus den Lagrange Gleichungen, um gewöhnliche Newtonsche Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $y(t)$ zu erhalten.

   (e) Zeige dass die beiden Gleichungen (natürlich) nicht unabhängig sind, sondern dass z.B. die Bewegungsgleichung für $y(t)$ aus der für $x(t)$ und der Zwangsbedingung folgt.

2. Spezialfall: Bewegung auf einer schiefen Ebene

   Im Allgemeinen ist die so erhaltene Bewegungsgleichung für $x(t)$ eine nicht-lineare Differentialgleichung (ugh!). Diese Gleichung wird allerdings linear wenn $f(x)$ selbst eine lineare Funktion ist, $f(x) = kx$, das heisst wenn sich das Teilchen entlang der Geraden (schiefen Ebene) $y = kx$ mit Steigung $k = \tan\alpha$ bewegt.

   (a) Löse die Bewegungsgleichung für $x(t)$ in diesem Fall.

   (b) Bestimme die Lösung für $y(t)$ aus der Zwangsbedingung.

   (c) Vergleiche zur Kontrolle das Resultat mit dem Ergebnis der Rechnung in Kapitel 8 von "Fliessbach: Mechanik" (beachte dass dort die Bewegung in der vertikalen (x, z)-Ebene stattfindet).