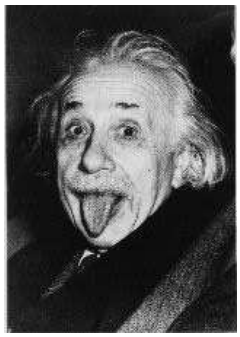

Mechanik II Übungen 02

Lagrange Funktion und Euler-Lagrange Gleichungen

1. **Bewegung im Schwerefeld entlang einer beliebigen Kurve**

   Betrachte das Beispiel aus den Übungen 01.1, und führe $q = x$ als verallgemeinerte Koordinate ein.

   (a) Bestimme die Lagrange Funktion $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x})$.

   (b) Zeige dass die daraus resultierende Euler-Lagrange Gleichung für $x(t)$ identisch mit der in Übungen 01.1(d) hergeleiteten Bewegungsgleichung für $x(t)$ ist.

2. **Ebenes Pendel im Schwerefeld**

   Gegeben sei ein ebenes Pendel mit Masse m und Fadenlänge ℓ im Schwerefeld. Der Aufhängepunkt P habe Koordinaten (x_P, y_P).

   (a) Betrachte zunächst (zum Aufwärmen, dieser Fall wurde bereits in der Vorlesung besprochen) den Fall, dass der Aufhängepunkt fix ist (o.B.d.A. bei $(x_P = 0, y_P = 0)$). Wähle den Winkel φ (Abweichung des Pendels von der Vertikalen) als verallgemeinerte Koordinate, bestimme die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi})$ und zeige dass $\mathcal{L}$ auf die Bewegungsgleichung $\ddot{\varphi} + (g/\ell)\sin\varphi = 0$ führt. Für kleine Auslenkungen reduziert sich diese auf die Schwingungsgleichung $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$ mit konstanter Frequenz $\omega = \sqrt{g/\ell}$.

   (b) Betrachte nun den Fall, dass der Aufhängepunkt horizontale Schwingungen ausführt, $x_P(t) = A\cos\Omega t$. Bestimme die Lagrange Funktion und die Bewegungsgleichung in diesem Fall, und zeige dass sich die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen auf die einer erzwungenen harmonischen Schwingung (mit Frequenz des Kraftterms Ω) reduziert.

   (c) Betrachte zu guter Letzt den Fall, dass der Aufhängepunkt eine Schwingung in vertikaler Richtung ausführt, $y_P(t) = A\cos\Omega t$. Bestimme die Lagrange Funktion und die Bewegungsgleichung, und zeige dass sich in diesem Fall die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen auf eine Schwingungsgleichung mit einer zeitabhängigen Frequenz $\omega(t)$ reduziert.