



MECHANIK II ÜBUNGEN 03

EULER-LAGRANGE GLEICHUNGEN, ROTIERENDES BEZUGSSYSTEM

1. ZWEI WICHTIGE EIGENSCHAFTEN DER EULER-LAGRANGE GLEICHUNGEN

(a) “Eichinvarianz”

Seien $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}'$ zwei Lagrangefunktionen die sich nur um eine totale Zeitableitung unterscheiden,

$$\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} \mathcal{F}(q, t) . \quad (1)$$

Zeige dass die Euler-Lagrange Gleichungen für $\mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}$ identisch sind.

(b) “Forminvarianz” oder “Koordinateninvarianz”

Betrachte eine (evtl. zeitabhängige) invertierbare Koordinatentransformation der verallgemeinerten Koordinaten q^a ,

$$q^a = q^a(\bar{q}^b, t) \quad , \quad \det \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^b} \neq 0 . \quad (2)$$

Zeige dass die Euler-Lagrange Gleichungen *forminvariant* unter diesen Koordinatentransformationen ist, d.h. dass

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\bar{q}}^a} - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{q}^a} = 0 \quad \forall a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^a} = 0 \quad \forall a \quad (3)$$

gilt, wobei

$$\bar{\mathcal{L}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \mathcal{L}(q(\bar{q}, t), \dot{q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), t) . \quad (4)$$

Zeige dafür zunächst, dass sich die Geschwindigkeiten mit der Jacobi-Matrix transformieren, d.h. dass

$$\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{\bar{q}}^b} = \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^b} \quad (5)$$

gilt.

Bemerkung: für (a) und (b) mag es darüber hinaus nützlich sein, die Identität

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^a} = \frac{\partial}{\partial q^a} \frac{d}{dt} \quad (6)$$

(oder Varianten davon) zu verwenden.

2. SCHEINKRÄFTE IN EINEM ROTIERENDEM BEZUGSSYSTEM

Seien (x', y') kartesische Koordinaten, und (x, y) die Koordinaten bezüglich eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Koordinatensystems,

$$x' = x \cos \omega t - y \sin \omega t \quad , \quad y' = x \sin \omega t + y \cos \omega t \quad . \quad (7)$$

Bestimme die Lagrangefunktion eines freien Teilchens in diesem Koordinatensystem, und zeige dass in den Euler-Lagrange Gleichungen zwei Arten von Scheinkräften auftreten, eine radial nach aussen wirkende abstossende Kraft (Zentrifugalkraft), und eine geschwindigkeitsabhängige und orthogonal zur Geschwindigkeit $(\dot{x}, \dot{y})$ wirkende Kraft (Corioliskraft).