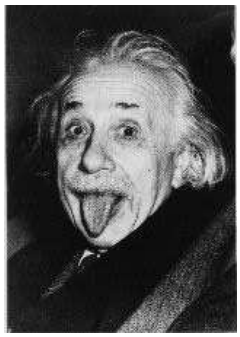

Mechanik II Übungen 04

Noether-Theorem, Galilei-Transformationen

1. Teilchen im Schwerefeld und Galilei-Transformationen

   Betrachte ein Teilchen dass sich in einem konstanten Schwerkraftfeld in der (vertikalen) x-Richtung bewegt. Zeige dass die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ unter Galileischen Geschwindigkeitstransformationen $x \to x' = x - wt$ (quasi-)invariant ist, bestimme aus dem Noether-Theorem die entsprechende Erhaltungsgrösse, verifiziere explizit (durch Einsetzen der allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichung in die Erhaltungsgrösse) dass diese tatsächlich konstant ist, und lies daraus ihre physikalische Interpretation ab.

2. Abgeschlossene Systeme und der Schwerpunktsatz

   Betrachte ein abgeschlossenes System, d.h. ein N-Teilchen-System mit Lagrange-Funktion

   $$\mathcal{L} = \sum_{A=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_A \dot{\vec{x}}_A^2 - U(|\vec{x}_A - \vec{x}_B|) \quad . \tag{1}$$

   Zeige dass die Lagrange-Funktion unter Galilei-Transformationen $\vec{x}_A \to \vec{x}_A - \vec{w}t$ (quasi-)invariant ist, und dass die entsprechende Erhaltungsgrösse dem *Schwerpunktsatz* entspricht, dass sich der Massenschwerpunkt

   $$\vec{S}(t) = \frac{\sum_A m_A \vec{x}_A(t)}{\sum_A m_A} \tag{2}$$

   geradlinig und gleichförmig bewegt.

3. Invarianz der Erhaltungsgrössen unter Eichtransformationen

   Zeige dass die aus dem Noether-Theorem folgenden Erhaltungsgrössen P_Δ,

   $$\Delta\mathcal{L} = \frac{d}{dt}\mathcal{F}_\Delta \quad \Rightarrow \quad P_\Delta = p_a \Delta q^a - \mathcal{F}_\Delta \quad , \tag{3}$$

   invariant unter den mechanischen Eichtransformationen $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} + d\mathcal{F}/dt$ (Übungen 03.1.a) sind, d.h. zeige dass $\mathcal{L}'$ unter $q^a \to q^a + \Delta q^a$ quasi-invariant ist, wenn $\mathcal{L}$ (quasi-)invariant ist, bestimme die entsprechende Erhaltungsgrösse P'_Δ und zeige dass $P'_\Delta = P_\Delta$.