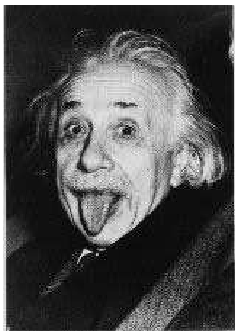

Mechanik II Übungen 05

Variationsrechnung

1. Kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten auf dem Zylinder

   Gesucht ist die kürzeste Verbindung ziwschen 2 Punkten P_1, P_2 auf der Zylinder-Oberfläche $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Führe als verallgemeinerte Koordinaten Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) mit $r = R$ ein, und verwende ϕ als Parameter der Kurve $z = z(\phi)$.

   (a) Bestimme den Integranden $F(z, z', \phi)$ des Variationsproblems in

   $$L[z] = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \; F(z(\phi), z'(\phi), \phi) \tag{1}$$

   (b) Zeige dass sowohl "Impulserhaltung" (Integrand hängt nicht von z ab) also auch "Energieerhaltung" (Integrand hängt nicht explizit von ϕ ab) auf die Bedingung $z'(\phi) =$ konstant führen, so dass die Lösung $z(\phi) = z(0) + c\phi$ ist (eine sogenannte *Schraubenlinie*).

2. Brachistochrone

   Ein Massenpunkt mit Anfangsgeschwindigkeit Null soll im konstanten Gravitationsfeld entlang einer Kurve $y = y(x)$ von einem Anfangspunkt $P_1 = (x_1, 0)$ nach $P_2 = (x_2, y_2)$ laufen (die y-Achse zeige vertikal nach unten - dies dient nur dem Zweck, ein paar lästige Minuszeichen in den Rechnungen zu vermeiden). Gesucht ist die Form der Kurve die die dafür benötigte Zeit $T = T[y]$,

   $$T[y] = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} ds/v \tag{2}$$

   minimiert.

   (a) Verwende Energieerhaltung (im üblichen Sinn) um die Geschwindigkeit v durch $y(x)$ auszudrücken und dadurch den Integranden von

   $$T[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; F(y, y', x) \tag{3}$$

   zu bestimmen.

(b) Verwende "Energieerhaltung" (im Sinn von: Integrand hängt nicht explizit von x ab), um zu zeigen dass $y(x)$ die Gleichung

$$y(1 + y'^2) = 1/(2gC^2) \tag{4}$$

für eine Konstante C erfüllt.

(c) Verifiziere (oder zeige aus Separation der Variablen und einem geeigneten Variablenwechsel), dass die Lösungskurve in parametrisierter (impliziter) Form durch

$$x(\phi) = R_0(\phi - \sin\phi) + x(0) \quad , \quad y(\phi) = R_0(1 - \cos\phi) \tag{5}$$

gegeben ist (mit $R_0 = 1/(4gC^2)$).

Bemerkung: Die Lösungskurve ist eine "Zykloide", d.h. die Bahn die ein Punkt auf dem Rand eines Rades (mit Radius R_0) durch Abrollen dieses Rades auf einer Ebene (in diesem Fall entlang der x-Achse) beschreibt. Die (m.E. nicht a priori offensichtliche) Antwort auf die Frage, entlang welcher Kurve die Fallzeit zwischen 2 Punkten im konstanten Gravitationsfeld minimiert wird, ist also dass die gesuchte Brachistochrone ein Segment einer Zykloide ist.