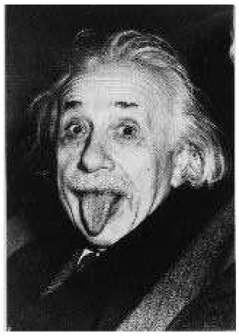

Mechanik II Übungen 07

Hamilton Funktion, Hamiltonsche Gleichungen und Poisson-Klammern

1. Hamiltonsche Gleichungen als Euler-Lagrange Gleichungen

   Zeige dass die Hamiltonschen Gleichungen $\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}$ aus den Euler-Lagrange Gleichungen für die (unabhängigen) Variablen $(q^a(t), p_a(t))$ für die Wirkung

   $$S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_a p_a(t)\dot{q}^a(t) - H(q(t), p(t)) \right) \quad (1)$$

   folgen.

2. Hamilton Funktion für ein Teilchen im Magnetfeld

   Wir hatten gesehen, dass die Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen in einem Magnetfeld $\vec{B}$ aus einer Lagrange Funktion mit einem verallgemeinerten (geschwindigkeitsabhängigen) Potential hergeleitet werden kann,

   $$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + e\dot{\vec{x}}.\vec{A} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{\vec{x}} = e(\dot{\vec{x}} \times \vec{B}) \ . \quad (2)$$

   Bestimme die Hamilton Funktion und zeige dass sie aus der für das freie Teilchen, $H = \vec{p}^2/2m$ durch die Substitution ("minimale Kopplung") $\vec{p} \to \vec{p} - e\vec{A}$ hervorgeht.

3. Poisson-Klammern und Drehimpuls

   Seien $L_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k$ die (kartesischen) Komponenten des Drehimpulses. Zeige dass

   $$\{L_i, x_j\} = \epsilon_{ijk}x_k \quad , \quad \{L_i, p_j\} = \epsilon_{ijk}p_k \quad , \quad \{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk}L_k \ . \quad (3)$$

   Bemerkung: dies zeigt, dass die L_i über die Poisson-Klammern infinitesimale Rotationen erzeugen, in dem Sinn dass mit $L_{\vec{\omega}} \equiv \omega^i L_i$ z.B. gilt

   $$\{L_{\vec{\omega}}, x_j\} = (\vec{x} \times \vec{\omega})_j \quad , \quad \{L_{\vec{\omega}}, L_{\vec{\nu}}\} = L_{\vec{\omega} \times \vec{\nu}} \quad (4)$$

   (letzteres ist die "Lie Algebra" der infinitesimalen Rotationen).

4. Jacobi Identität

   Zeige dass die Jacobi-Identität in der folgenden äquivalenten Form geschrieben werden kann (Fleissaufgabe: Beweis der Jacobi-Identität ...):

   $$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{f,\{g,h\}\} = \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\} \quad (5)$$