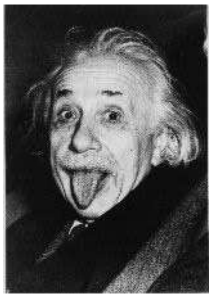
Formelsammlung Klassische Feldtheorie



2 Lorentz Gruppe

1. Lorentz-Transformationen = Lineare Transformationen $\bar{x}^\alpha = L^\alpha_{\ \beta}\, x^\beta$
   die Minkowski Abstandsquadrat invariant lassen:

$$\eta_{\alpha\beta}\bar{x}^\alpha\bar{x}^\beta = \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\alpha\beta}L^\alpha_{\ \gamma}L^\beta_{\ \delta} = \eta_{\gamma\delta} \quad \Leftrightarrow \quad L^T\eta L = \eta \tag{1}$$

2. Lorentztransformationen bilden eine Gruppe:
   - Matrix-Multiplikation ist assoziativ
   - $L_1^T\eta L_1 = \eta, L_2^T\eta L_2 = \eta \quad \Rightarrow \quad (L_1L_2)^T\eta(L_1L_2) = \eta$
   - $\exists$ inverse Matrix L^{-1} weil $\det L \neq 0$ (s.u.)
   - $\exists$ Einheitselement $L = \mathbb{I}$

3. Komponenten der Lorentz-Gruppe:

$$\begin{aligned} L^T\eta L &= \eta & &\Rightarrow \quad \det(L) = \pm 1 \\ (L^T\eta L)_{00} &= \eta_{00} & &\Rightarrow \quad |L^0_{\ 0}| \geq 1 \end{aligned} \tag{2}$$

   Die Transformationen mit $\det L = +1$ und $L^0_{\ 0} \geq 1$ bilden eine zusammenhängende Untergruppe der Lorentz-Gruppe, bestehend aus Rotationen und boosts (Geschwindigkeitstransformationen, hyperbolische Rotationen), aber ohne Zeit- oder Raum-Spiegelungen. Diese Untergruppe (technisch die Gruppe der eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen) wird oft einfach nur als *die Lorentz-Gruppe* bezeichnet, und bis auf weiteres folgen wir der Terminologie.

4. Dimension der Lorentz-Gruppe: 6 = 3 Rotationen + 3 boosts
   (oder $d(d+1)/2$ in $(d+1)$ Raum-Zeit Dimensionen)

5. Infinitesimale Lorentz-Transformationen: $L = \mathbb{I} + \omega$ mit ω infinitesimal:

$$L^T\eta L = \eta \quad \Rightarrow \quad \omega^T\eta + \eta\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\eta\omega) + (\eta\omega)^T = 0 \tag{3}$$

   dh $\eta\omega$ ist antisymmetrisch. In Komponenten,

$$\delta x^\alpha = \omega^\alpha_{\ \beta}x^\beta \qquad \omega_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_{\ \beta} = -\omega_{\beta\alpha} \tag{4}$$

   Anzahl der unabhängigen Komponenten einer antisymmetrischen (4×4)-Matrix:
   6
   (oder $d(d+1)/2$ in $(d+1)$ Raum-Zeit Dimensionen)

3 Lorentz Tensoren

1. Lorentz-Vektoren (oder 4er Vektoren):
   (a) Definition: Objekte mit Komponenten (v^α) die sich unter Lorentz-Transformationen $\bar{x}^\alpha = L^\alpha_{\ \beta} x^\beta$ mit der Jacobi-Matrix transformieren, d.h.
   $$\bar{v}^\alpha = L^\alpha_{\ \beta} v^\beta \tag{5}$$
   (alternative Notation zB: $v^{\bar{\alpha}} = L^{\bar{\alpha}}_{\ \beta} v^\beta$ etc.)

   (b) Konsequenzen: η-Norm $v^2 = \eta_{\alpha\beta} v^a v^\beta$ und η-Skalarprodukt $\eta_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta$ von 4er-Vektoren sind invariant unter Lorentz-Transformationen.

2. Andere Lorentz-Tensoren:
   (a) Skalare: Objekte, die invariant unter Lorentz-Transformationen sind
   Beispiele: Norm von 4er-Vektoren, Eigenzeit, ...

   (b) Lorentz-Kovektoren: Objekte u_α die sich unter Lorentz-Transformationen mit der *kontragredienten* Darstellung $\Lambda = (L^T)^{-1} = \eta L \eta^{-1}$ transformieren, i.e.
   $$\bar{u}_\alpha = \Lambda_\alpha^{\ \beta} u_\beta \qquad \text{oder} \quad \bar{u}_{\bar{\alpha}} = \Lambda_{\bar{\alpha}}^{\ \beta} u_\beta \tag{6}$$
   mit
   $$\Lambda_{\bar{\alpha}}^{\ \beta} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} L^{\bar{\gamma}}_{\ \delta} \eta^{\delta\beta} \equiv L_{\bar{\alpha}}^{\ \beta} \tag{7}$$
   Bemerkungen:
      i. Beispiel $v_\alpha = \eta_{\alpha\beta} v^\beta$, mit v^α ein 4er-Vektor; Mathematische Interpretation: Kovektoren leben im Dualraum des Raums der Vektoren
      ii. die partielle Ableitung ∂_{x^α} transformiert sich wie (ergo ist) ein Kovektor:
      $$\partial_{\bar{x}^\alpha} = \Lambda_\alpha^{\ \beta} \partial_{x^\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{\bar{\alpha}} = \Lambda_{\bar{\alpha}}^{\ \beta} \partial_\beta \tag{8}$$
      ($\Rightarrow$ Rechtfertigung, $\partial_{x^\alpha} = \partial_\alpha$ abzukürzen: ist ein Kovektor)

   (c) Lorentz (p,q)-Tensoren: Objekte $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ die sich unter Lorentz-Transformationen wie ein Produkt von p Vektoren und q Kovektoren transformieren.

3. Lorentz-Tensoralgebra
   (a) Summe von 2 (p,q)-Tensoren ist ein (p,q)-Tensor
   (b) Direktes Produkt von einem (p_1,q_1)-Tensor und einem (p_2,q_2)-Tensor ist ein (p_1+p_2, q_1+q_2)-Tensor
   (c) Kontraktionen von Lorentz-Tensoren liefern Tensoren niedrigerer Stufe: wenn $A_{\alpha\beta\gamma}$ ein $(0,3)$-Tensor ist, und v^α ein Vektor, dann ist $A_{\alpha\beta\gamma} v^\gamma$ ein $(0,2)$-Tensor etc.
   (d) Allgemein lässt sich das Transformationsverhalten eines aus Lorentz-Tensoren gebildeten Objekts aus der Anzahl und Position der freien Indizes ablesen (sehr nützlich!)