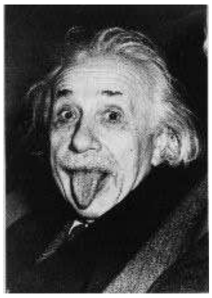
Formelsammlung Klassische Feldtheorie



4 Relativistische Mechanik

1. Relativistische Kinematik
   (a) Weltlinien von massiven Teilchen: $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$, τ Eigenzeit
   (b) 4er-Geschwindigkeit
   $$u^\alpha = \frac{d}{d\tau}x^\alpha = (\gamma(v)c, \gamma(v)\vec{v}) \quad , \quad u^\alpha u_\alpha = -c^2 \tag{1}$$
   (c) 4er-Beschleunigung
   $$a^\alpha = \frac{d}{d\tau}u^\alpha = \frac{d^2}{d\tau^2}x^\alpha \quad , \quad u^\alpha a_\alpha = 0 \tag{2}$$
2. Freies Teilchen: Relativistische Dynamik & Wirkungsprinzip
   (a) Bewegungsgleichung $a^\alpha = 0$
   (b) Wirkung & Lagrange-Funktion
   $$\begin{aligned} S &= -mc^2 \int d\tau = -mc^2 \int d\lambda (d\tau/d\lambda) \equiv \int d\lambda\, L_\lambda \\ L_\lambda &= -mc^2 \left(-\frac{1}{c^2}\eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} \right)^{1/2} = -mc \left(-\eta_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{3}$$
   (c) Zeit-parametrisierte Wirkung
   $$\begin{aligned} S &= -mc^2 \int dt (d\tau/dt) \equiv \int dt\, L_t \\ L_t &= -mc^2\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2} \end{aligned} \tag{4}$$
   (d) Nicht-relativistischer Grenzwert
   $$v \ll c \quad : \quad S = \int dt\, L_t \quad \to \quad -mc^2 \int dt + \int dt\, \tfrac{1}{2}m\vec{v}^2 \tag{5}$$
3. Kanonische Impulse und Hamilton-Funktion (Energie)
   (a) Kanonische Impulse
   $$p_i^{(c)} = \frac{\partial L_t}{\partial v^i} = m\gamma(v)v_i \tag{6}$$
   (b) Legendre Transformation
   $$H = p_i^{(c)}v^i - L_t = m\gamma(v)c^2 \tag{7}$$

(c) Relativistische Energie eines freien Teilchens

$$E = m\gamma(v)c^2 \approx mc^2 + \tfrac{1}{2}m\vec{v}^2 + \ldots \tag{8}$$

(d) Zusammenhang Energie - Impuls

$$E = \sqrt{m^2c^4 + (\vec{p}^{(c)})^2} \approx mc^2 + \frac{(\vec{p}^{(c)})^2}{2m} + \ldots \tag{9}$$

4. Kovarianter Impuls & Energie-Impuls 4er-Vektor

(a) Kovarianter Impuls

$$p_\alpha = \frac{\partial L_\lambda}{\partial(dx^\alpha/d\lambda)} = m\eta_{\alpha\beta}u^\beta \quad , \quad p^\alpha = mu^\alpha \qquad \text{(unabhängig von } \lambda) \tag{10}$$

(b) Kovarianter Impuls = Energie-Impuls 4er-Vektor

$$p^\alpha = (m\gamma(v)c, m\gamma(v)\vec{v}) \quad \Rightarrow \quad p^0 = E/c \quad , \quad p^i = p^{(c)i} \tag{11}$$

(c) 4er-Norm des Energie-Impuls Vektors (vgl. 3d)

$$p^\alpha p_\alpha = -m^2c^2 \quad \Rightarrow \quad E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 \tag{12}$$

(d) Massenschale

$$\begin{array}{lll} m^2 > 0 & (p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2 & \text{Hyperboloid im Impulsraum} \\ m^2 = 0 & E = c|\vec{p}| & \text{Lichtkegel im Impulsraum} \end{array} \tag{13}$$

5. Noether-Theorem und Erhaltungssätze

(a) Allgemein: $x^\alpha \to x^\alpha + \delta x^\alpha$ eine (infinitesimale) Transformation, die Lagrangefunktion $L = L(x^\alpha(\lambda), x'^\alpha(\lambda))$ invariant laesst,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha + \frac{\partial L}{\partial x'^\alpha}\delta x'^\alpha = 0 \tag{14}$$

dann ist $p_\alpha \delta x^\alpha$ eine Erhaltungsgrösse,

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial x'^\alpha}\delta x^\alpha\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau}(p_\alpha \delta x^\alpha) = 0 \tag{15}$$

(b) Infinitesimale Translationen $\delta x^\alpha = \epsilon^\alpha$

$$\delta x^\alpha = \epsilon^\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}p^\alpha = 0 \qquad \text{(Impuls-Erhaltung)} \tag{16}$$

(c) Infinitesimale Lorentz-Transformationen $\delta x^\alpha = \omega^\alpha_{\ \beta}x^\beta \quad (\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha})$

$$\delta x^\alpha = \omega^\alpha_{\ \beta}x^\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\mathcal{L}^{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \mathcal{L}^{\alpha\beta} = x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha \tag{17}$$

($\mathcal{L}^{ik} \sim$ Drehimpuls, $\mathcal{L}^{0k}$-Erhaltung $\sim$ Energieschwerpunkt-Satz)