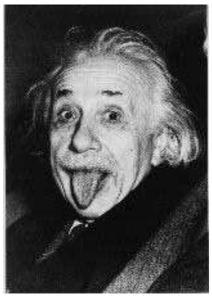
Formelsammlung Klassische Feldtheorie



6 (Pseudo-)Orthogonale Gruppen

1. Definition Gruppe: Menge G mit einer Operation

$$(g_1, g_2) \in G \times G \quad \mapsto \quad g_1 g_2 \in G \quad \text{(Multiplikation)} \tag{1}$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \text{Assoziativität:} \quad & (g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) \quad \forall g_k \in G \\ \exists \text{ Einheitselement:} \quad & \exists e \in G: \quad eg = ge = g \quad \forall g \in G \\ \exists \text{ Inverses:} \quad & \forall g \in G \quad \exists g^{-1} \in G: \quad g^{-1} g = g g^{-1} = e \end{aligned} \tag{2}$$

2. Matrizen und Matrix-Gruppen

Sei $\mathsf{Mat}(n, \mathbb{R})$ (bzw. $\mathsf{Mat}(n, \mathbb{C})$) der Raum der reellen (bzw. komplexen) $(n \times n)$-Matrizen. Diese bilden eine assoziative Matrix-Algebra bezüglich Matrix-Multiplikation, es gibt ein Einheitselement, die Einheitsmatrix $e = \mathbb{I}$, aber Inverse gibt es nur wenn die Determinante nicht verschwindet. Daher definiert man die *allgemeine lineare Gruppe* durch

$$\begin{aligned} \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) &= \{M \in \mathsf{Mat}(n, \mathbb{R}) : \det M \neq 0\} \\ \mathsf{GL}(n, \mathbb{C}) &= \{M \in \mathsf{Mat}(n, \mathbb{C}) : \det M \neq 0\} \end{aligned} \tag{3}$$

(GL für *general linear group*).

(a) $\mathsf{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$ sind Gruppen.

(b) Matrix-Gruppen sind Gruppen die konkret als Untergruppen von $\mathsf{GL}(n) = \mathsf{GL}(n, \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C})$ gegeben sind, d.h. $G \subseteq \mathsf{GL}(n)$ ist eine Untermenge die eine Gruppe bezüglich der induzierten Matrix-Multiplikation bildet.

(c) Einfache Beispiele sind (wegen der Multiplikativität der Determinante, $\det(M_1 M_2) = \det(M_1) \det(M_2)$)

$$\begin{aligned} \mathsf{GL}_+(n, \mathbb{R}) &= \{M \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) : \det M > 0\} \\ \mathsf{SL}(n, \mathbb{R}) &= \{M \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{R}) : \det M = 1\} \\ \mathsf{SL}(n, \mathbb{C}) &= \{M \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{C}) : \det M = 1\} \end{aligned} \tag{4}$$

(d) Die Dimension dieser Gruppen ist z.B.

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) = n^2 \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{SL}(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1 \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathsf{GL}(n,\mathbb{C}) = 2n^2 \tag{5}$$

3. Die Orthogonalen Gruppen $\mathsf{O}(n)$ und $\mathsf{SO}(n)$

(a) Definition:

$$\mathsf{O}(n) = \{R \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) : \; R^T R = \mathbb{I}\} \tag{6}$$

(b) Algebraische Interpretation: die Transformationen die die Einheitsmatrix invariant lassen, $R^T \, \mathbb{I} \, R = \mathbb{I}$.

(c) Geometrische Interpretation: Gruppe der linearen Transformationen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die die Euklidische Norm $||x||^2 = x^T x$ invariant lässt,

$$\bar{x}^a = R^a_{\ b} x^b : \quad (R^a_{\ b}) \in \mathsf{O}(n) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x}^T \bar{x} \equiv \delta_{ab} \bar{x}^a \bar{x}^b = \delta_{ab} x^a x^b \equiv x^T x \ . \tag{7}$$

(d) Determinante

$$R \in \mathsf{O}(n) \quad \Rightarrow \quad \det(R^T R) = 1 \quad \leftrightarrow \quad \det R = \pm 1 \tag{8}$$

(e) Komponenten von $\mathsf{O}(n)$

$\mathsf{O}(n)$ besteht aus zwei zusammenhängenden Komponenten, den orthogonalen Matrizen mit Determinante +1 bzw. -1. Matrizen mit Determinante +1 bilden eine Untergruppe, die *spezielle orthogonale Gruppe* oder *Gruppe der Rotationen*

$$\mathsf{SO}(n) = \{R \in \mathsf{O}(n) : \; \det R = +1\} \ . \tag{9}$$

Sie besteht aus Rotationen. Die andere Komponente $\mathsf{O}_-(n)$,

$$\mathsf{O}(n) = \mathsf{SO}(n) \cup \mathsf{O}_-(n) \tag{10}$$

enthält z.B. Spiegelungen der Form $P_1 = \mathrm{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ und allgemeiner Elemente der Form $P_a R$, P_a Spiegelung an der x^a-Achse, $R \in \mathsf{SO}(n)$ eine Rotation. Das Produkt zweier Spiegelungen ist eine Rotation, $P_a P_b \in \mathsf{SO}(n)$, und allgemeiner folgt aus der Multiplikativität der Determinante dass

$$\begin{aligned}
R_1 \in \mathsf{SO}(n) \ , \quad R_2 \in \mathsf{SO}(n) \quad &\Rightarrow \quad R_1 R_2 \in \mathsf{SO}(n) \\
R_1 \in \mathsf{SO}(n) \ , \quad R_2 \in \mathsf{O}_-(n) \quad &\Rightarrow \quad R_1 R_2 \in \mathsf{O}_-(n) \\
R_1 \in \mathsf{O}_-(n) \ , \quad R_2 \in \mathsf{O}_-(n) \quad &\Rightarrow \quad R_1 R_2 \in \mathsf{SO}(n)
\end{aligned} \tag{11}$$

(f) Dimension: $R^T R$ ist symmetrisch, daher sind $R^T R = \mathbb{I}$ $n(n+1)/2$ Bedingungen, ergo

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{SO}(n) = n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2 \tag{12}$$

Beispiele: 1 Winkel für Drehungen in der Ebene $\mathbb{R}^2$, 3 (Euler-)Winkel für Drehungen im Raum $\mathbb{R}^3$, 6 Winkel für Drehungen im $\mathbb{R}^4$, nämlich Drehungen in den 6 2-Ebenen $(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$. Wichtig: nur in 3 Dimensionen lassen sich die *Rotationen in einer 2-Ebene* mit den *Rotationen um eine Achse* identifizieren (nämlich um die Achse orthogonal zu der 2-Ebene).

(g) Infinitesimale (Erzeugende von) Rotationen: $R = \mathbb{I} + \omega$ mit ω infinitesimal

$$\begin{aligned} \det R = 1 \qquad &\Rightarrow \quad \operatorname{tr}\omega = 0 \\ R^T R = \mathbb{I} \qquad &\Rightarrow \quad \omega^T + \omega = 0 \quad (\Rightarrow\ \operatorname{tr}\omega = 0) \end{aligned} \tag{13}$$

In Komponenten:

$$R^a_{\ b} = \delta^a_{\ b} + \omega^a_{\ b} \qquad \omega_{ab} \equiv \delta_{ac}\omega^c_{\ b} = -\omega_{ba} \tag{14}$$

Wichtig: nur in 3 Dimensionen lassen sich die Parameter ω_{ab} der infinitesimalen Rotationen mit Hilfe des ϵ-Symbols ϵ_{abc} mit einem Vektor identifizieren, $\omega_{ab} = \epsilon_{abc}v^c$, so dass eine infinitesimale Rotation in der Ebene orthogonal zu $\vec{v}$ die vielleicht vertrautere Form

$$\delta x^a = \omega^a_{\ b}x^b = \epsilon^a_{\ bc}x^b v^c = (\vec{x} \times \vec{v})^a \tag{15}$$

einer Rotation um die Achse $\vec{v}$ annimmt.

4. Die Pseudo-Orthogonalen Gruppen $\mathsf{O}(p,q)$

(a) Definition: wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^{p,q}$, d.h. den Raum $\mathbb{R}^n$, $n = p+q$, mit Skalarprodukt gegeben durch die Matrix

$$\eta = \operatorname{diag}(\underbrace{-1,\ldots,-1}_{p},\underbrace{+1,\ldots+1}_{q}) \quad : \tag{16}$$

$$\mathsf{O}(p,q) = \{L \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{R}) :\ L^T\eta L = \eta\} \tag{17}$$

(b) Algebraische Interpretation: Transformationen die Matrix η invariant lassen.

(c) Geometrische Interpretation: Gruppe der linearen Transformationen $\mathbb{R}^{p,q} \to \mathbb{R}^{p,q}$ die die verallgemeinerte Minkowski- Norm $||x||^2 = x^T\eta x$ invariant lässt,

$$\bar{x}^a = L^a_{\ b}x^b : \quad (L^a_{\ b}) \in \mathsf{O}(p,q) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x}^T\eta\bar{x} \equiv \eta_{ab}\bar{x}^a\bar{x}^b = \eta_{ab}x^a x^b \equiv x^T\eta x \ . \tag{18}$$

(d) Konsequenzen der Definition:

$$\mathsf{O}(p,q) \cong \mathsf{O}(q,p) \quad , \quad \mathsf{O}(n,0) \cong \mathsf{O}(0,n) \cong \mathsf{O}(n) \tag{19}$$

(e) Determinante

$$L \in \mathsf{O}(n) \quad \Rightarrow \quad \det(L^T\eta L) = \det\eta \quad \leftrightarrow \quad \det L = \pm 1 \tag{20}$$

(f) Die Untergruppe $\mathsf{SO}(p,q)$:

$$\mathsf{SO}(p,q) = \{L \in \mathsf{O}(p,q) : \ \det L = +1\} \tag{21}$$

(eigentliche pseudo-orthogonale Transformationen). Diese Untergruppe ist im allgemeinen nicht zusammenhängend (besteht noch aus 2 zusammenhängenden Komponenten), Beispiel:

$$\begin{aligned} SO(1,1) &= \left\{ \begin{pmatrix} \pm\cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \pm\cosh\alpha \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -\cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & -\cosh\alpha \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{22}$$

Weiterführende Diskussion im Fall der Lorentzgruppe folgt in Kapitel 7.

(g) Dimension: $L^T\eta L = \eta$ gleich viele Bedingungen wie $R^T R = \mathbb{I}$, daher

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{SO}(p,q) = n(n-1)/2 \qquad (\ n = p+q\ ) \tag{23}$$

(h) Infinitesimale Transformationen: $L = \mathbb{I} + \omega$ mit ω infinitesimal

$$L^T\eta L = \eta \quad \Rightarrow \quad \omega^T\eta + \eta\omega = 0 \quad \leftrightarrow \quad (\eta\omega)^T + (\eta\omega) = 0 \tag{24}$$

In Komponenten:

$$L^a_{\ b} = \delta^a_{\ b} + \omega^a_{\ b} \qquad \omega_{ab} \equiv \eta_{ac}\omega^c_{\ b} = -\omega_{ba} \tag{25}$$

7 Komponenten und Untergruppen der Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$

1. Definition der Lorentzgruppe

$$\mathcal{L} := \mathsf{O}(1,3) \cong \mathsf{O}(3,1) = \{L : \ L^T\eta L = \eta\} \tag{26}$$

2. Determinante

$$L^T\eta L = \eta \quad \Rightarrow \quad \det L = \pm 1 \tag{27}$$

3. Orientierung

$$\begin{aligned} L^T\eta L = \eta \quad &\Rightarrow \quad (L^T\eta L)_{00} = \eta_{00} \quad \leftrightarrow \quad (L^0_{\ 0})^2 = 1 + \sum_{k=1}^{3}(L^k_{\ 0})^2 \geq 1 \\ &\Rightarrow \quad \epsilon(L) := \frac{L^0_{\ 0}}{|L^0_{\ 0}|} = \pm 1 \end{aligned} \tag{28}$$

Interpretation: $\bar{x}^0 = L^0_{\ 0}x^0 + \ldots$: Transformationen mit $\epsilon(L) = +1$ bewahren die Zeitorientierung, Transformationen mit $\epsilon(L) = -1$ drehen sie um.

4. Multiplikative Struktur:

$$\det(L_1 L_2) = \det(L_1)\det(L_2) \qquad \epsilon(L_1 L_2) = \epsilon(L_1)\epsilon(L_2) \tag{29}$$

5. Zusammenhängende Komponenten von $\mathcal{L}$:

   die erlaubten Werte von $\epsilon(L)$ und $\det(L)$ definieren 4 verschiedene Komponenten von $\mathcal{L}$ (die jeweils zusammenhängend sind), nämlich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^\uparrow &= \{L \in \mathcal{L} : \epsilon(L) = +1, \det(L) = +1\} \\ \mathcal{L}_-^\uparrow &= \{L \in \mathcal{L} : \epsilon(L) = +1, \det(L) = -1\} \\ \mathcal{L}_-^\downarrow &= \{L \in \mathcal{L} : \epsilon(L) = -1, \det(L) = -1\} \\ \mathcal{L}_+^\downarrow &= \{L \in \mathcal{L} : \epsilon(L) = -1, \det(L) = +1\} \end{aligned} \tag{30}$$

   (a) $\mathcal{L}_+^\uparrow$: besteht aus den *eigentlichen orthochronen Transformationen*; ist als einzige der 4 Komponenten eine Gruppe (häufig auch einfach nur *die Lorentzgruppe* genannt); enthält $\mathbb{I}$, eigentliche Rotationen, boosts, keine Raum- oder Zeitspiegelungen

   (b) $\mathcal{L}_-^\uparrow$: besteht aus den *uneigentlichen orthochronen Transformationen*; ist keine Gruppe; enthält räumliche Spiegelungen $P_1 = \mathrm{diag}(+1, -1, +1, +1)$ etc. und insbesondere den *Paritätsoperator*

$$P = P_1 P_2 P_3 = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1) \tag{31}$$

   Es gilt

$$\mathcal{L}_-^\uparrow = \{PL, L \in \mathcal{L}_+^\uparrow\} \equiv P\mathcal{L}_+^\uparrow \tag{32}$$

   in dem Sinn dass sich jedes Element von $\mathcal{L}_-^\uparrow$ als Produkt einer eigentlich orthochronen Lorentz-Transformation und der Paritäts-Operation schreiben lässt.

   (c) $\mathcal{L}_-^\downarrow$: besteht aus den *uneigentlichen nicht-orthochronen Transformationen*; ist keine Gruppe; enthält die *Zeit-Spiegelung*

$$T = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1) \tag{33}$$

   Es gilt

$$\mathcal{L}_-^\downarrow = T\mathcal{L}_+^\uparrow \tag{34}$$

   (d) $\mathcal{L}_+^\downarrow$: besteht aus den *eigentlichen nicht-orthochronen Transformationen*; ist keine Gruppe; enthält $PT = -\mathbb{I}$, und es gilt

$$\mathcal{L}_+^\downarrow = (-\mathbb{I})\mathcal{L}_+^\uparrow \quad : \quad L \in \mathcal{L}_+^\uparrow \quad \Leftrightarrow \quad -L \in \mathcal{L}_+^\downarrow \tag{35}$$

6. (Einige) Untergruppen von $\mathcal{L}$:

   Multiplikative Struktur von $\epsilon(L)$ und $\det(L)$ erlaubt es, u.a. folgende Untergruppen von $\mathcal{L}$ zu definieren:

(a) $\mathcal{L}_+^\uparrow \equiv \mathsf{SO}_o(1,3)$ (Lorentz-Transformationen im engeren Sinn, bereits in Punkt 5(a) erwähnt)

(b) $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow = \mathsf{SO}(1,3) = \{L \in \mathcal{L} : \det(L) = +1\}$: *eigentliche Lorentzgruppe*

(c) $\mathcal{L}^\uparrow = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow = \{L \in \mathcal{L} : \epsilon(L) = +1\}$: *orthochrone Lorentzgruppe*

und man hat z.B. folgende offensichtliche Relationen,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^\uparrow \cup T\mathcal{L}^\uparrow \quad , \quad \mathcal{L}_+^\uparrow = \mathcal{L}^\uparrow \cap \mathcal{L}_+ \tag{36}$$

7. (Einige) Untergruppen von $\mathcal{L}_+^\uparrow \equiv \mathsf{SO}_o(1,3)$

Wir wissen bereits, dass $\mathsf{SO}_o(1,3)$ unter anderem Rotationen und boosts enthält. Formal lässt sich dies ausdrücken durch

$$\begin{aligned} &\mathsf{SO}(2) \subset \mathsf{SO}(3) \subset \mathsf{SO}_o(1,3) \\ &\mathsf{SO}_o(1,1) \subset \mathsf{SO}_o(1,2) \subset \mathsf{SO}_o(1,3) \end{aligned} \tag{37}$$

wobei zum Beispiel

$$\mathsf{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathsf{SO}_o(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{38}$$

Rotationen um die x^1-Achse bzw. boosts in der x^1-Richtung beschreiben.

Bemerkung: Die Untergruppen $\mathsf{SO}(3) \subset \mathsf{SO}_o(1,3)$ und $\mathsf{SO}_o(1,2) \subset \mathsf{SO}_o(1,3)$ lassen sich auch als die Untergruppen charakterisieren die aus den Lorentz-Transformationen bestehen die einen gegebenen zeitartigen bzw. raumartigen Vektor invariant lassen. Die analoge Untergruppe für einen lichtartigen Vektor ist auch 3-dimensional, hat aber eine andere Struktur. Sie enthält insbesondere eine $\mathsf{S0}(2)$ die transverse Rotationen beschreibt (z.B. die Rotationen in der $(2,3)$-Ebene für einen lichtartigen Vektor der Form $(1,1,0,0)$), aber auch zwei weitere “Nullrotationen” (die dieser Gruppe die Strukur der Euklidischen Gruppe in 2 Dimensionen, 1 Rotation, 2 Translationen, verleihen).

8. Lorentz-Tensoren (verfeinerte Definition)

Bisher hatten wir Lorentz-Tensoren also solche Objekte charakterisiert die sich unter Lorentz-Transformationen (und wir hatten zumeist nur Transformationen in der Komponente der Einheit $\mathcal{L}_+^\uparrow \equiv \mathsf{SO}_o(1,3)$ betrachtet) multilinear mit L und $\Lambda = (L^T)^{-1}$ transformieren,

$$\bar{T}^{\bar{\alpha}\ldots}_{\bar{\beta}\ldots} = L^{\bar{\alpha}}_{\ \alpha} \ldots \Lambda_{\bar{\beta}}^{\ \beta} \ldots \ T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots} \quad . \tag{39}$$

Transformationen wie Zeit- oder Raum-Spiegelungen erlauben (und, wie sir sehen werden, zwingen) uns, diese Definition etwas zu verallgemeinern und zu verfeinern, in dem wir nun zusätzlich ein Vorzeichen im Transformationsverhalten erlauben,

$$\bar{T}^{\bar{\alpha}\dots}_{\bar{\beta}\dots} = \alpha(L) L^{\bar{\alpha}}_{\ \alpha} \dots \Lambda^{\beta}_{\ \bar{\beta}} \dots \ T^{\alpha\dots}_{\beta\dots} \qquad \alpha(L) = \pm 1 \tag{40}$$

(a) Objekte mit $\alpha(L) = 1$ für $\forall L \in \mathcal{L}$ nennen wir *eigentliche Lorentz-Tensoren* (dies entspricht unserer früheren Definition von Lorentz-Tensoren)

(b) Objekte mit $\alpha(L) = \det(L)$ nennen wir *Pseudo-Tensoren*

(c) Objekte mit $\alpha(L) = \epsilon(L)$ nennen wir *Zeit-Pseudo-Tensoren*

(d) Objekte mit $\alpha(L) = \epsilon(L)\det(L)$ nennen wir *Raum-Pseudo-Tensoren*

9. Beispiele: verschiedene Varianten von Pseudotensoren tauchen in natürlicher Form auf (und sind auch in der Vorlesung schon aufgetaucht ohne dass wir sie gleich als solche erkannt hatten):

   (a) $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist ein total antisymmetrischer Pseudo-4-Tensor.
   Dies folgt aus einer allgemeinen Definition der Determinante einer $(n \times n)$-Matrix M,

   $$\epsilon_{a_1\dots a_n} M^{a_1}_{\ b_1} \dots M^{a_n}_{\ b_n} = \det(M) \epsilon_{b_1\dots b_n} \quad . \tag{41}$$

   Im konkreten Fall haben wir also

   $$\epsilon_{\alpha_0\dots\alpha_3} L^{\alpha_0}_{\ \bar{\beta}_0} \dots L^{\alpha_3}_{\ \bar{\beta}_3} = \det(L) \epsilon_{\bar{\beta}_0\dots\bar{\beta}_3} \quad . \tag{42}$$

   Jetzt sollte das ϵ-Symbol $\bar{\epsilon}_{\bar{\beta}_0\dots\bar{\beta}_3}$ im neuen Inertialsystem auch genau dieselben Eigenschaften haben wie das ϵ-Symbol im alten Intertialsystem (d..h. Werte $0, \pm 1$ etc.). Das heisst dass gelten soll

   $$\bar{\epsilon}_{\bar{\beta}_0\dots\bar{\beta}_3} \stackrel{!}{=} \epsilon_{\bar{\beta}_0\dots\bar{\beta}_3} \quad . \tag{43}$$

   Zusammen mit der vorherigen Gleichung bedeutet dies (weil $\det(L) = \det(L)^{-1}$) dass

   $$\bar{\epsilon}_{\bar{\beta}_0\dots\bar{\beta}_3} = \det(L) L^{\alpha_0}_{\ \bar{\beta}_0} \dots L^{\alpha_3}_{\ \bar{\beta}_3} \epsilon_{\alpha_0\dots\alpha_3} \quad . \tag{44}$$

   was nichts anderes heisst als dass $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ bis auf einen Faktor $\det(L)$ sich wie ein normaler Tensor verhält, aber dies ist genau die Definition eines Lorentz-Pseudo-Tensors.

   (b) die 4er-Geschwindigkeit u^α ist ein Zeit-Pseudo-Vektor
   Dies folgt aus der Tatsache dass unter der Zeitspiegelung

   $$T: \quad x^0 \to -x^0 \ , \ x^k \to x^k \quad \text{oder} \quad t \to -t \ , \ \vec{x} \to \vec{x} \tag{45}$$

   sich ein echter 4er-Vektor (eigentlicher Lorentz-Tensor) w^α natürlich wie

   $$T: \ (w^\alpha) = (w^0, \vec{w}) \quad \to \quad (-w^0, \vec{w}) \tag{46}$$

transformiert, während bei der 4er-Geschwidigkeit $u^\alpha = (\gamma c, \gamma\vec{v})$ wegen $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ unter der Transformation T die räunlichen Komponenten ihr Vorzeichen ändern, nicht die Zeitkomponente,

$$T:\ (u^0, \vec{u}) = (\gamma c, \gamma\vec{v}) \quad \rightarrow \quad (\gamma c, -\gamma\vec{v}) = -(-\gamma c, \gamma\vec{v}) = -(-u^0, \vec{u}) \ . \tag{47}$$

Unter Raum-Spiegelungen verhält sich u^α "normal". Es folgt also dass sich u^α unter Lorentz-Transformationen mit dem Vorzeichen $\epsilon(L)$ transformiert, daher ein Zeit-Pseudo-Vektor ist.

(c) daraus folgt dass der 4er-Strom der Maxwell-Theorie (typische Form $J^\alpha = \rho u^\alpha$) ebenfalls ein Zeit-Pseudo-Vektor ist, und aus den Maxwell-Gleichungen $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} \sim J^\beta$ folgt nun dass $F^{\alpha\beta}$ ein Zeit-Pseudo-Tensor ist.

(d) aus all diesen Beobachtungen folgt dass der duale Feldstärketensor $\tilde{F}^{\alpha\beta} \sim \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$ sich unter Lorentz-Transformationen mit dem Vorzeichen $\det(L)\epsilon(L)$ transformiert, also ein Raum-Pseudo-Tensor ist.

(e) daraus folgt dass $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ sich mit $\epsilon(L)^2 = 1$ transformiert und daher ein eigentlicher (echter) Skalar ist, während $F_{\alpha\beta}\tilde{F}^{\alpha\beta}$ sich mit $\epsilon(L)\epsilon(L)\det(L) = \det(L)$ transformiert und daher ein Pseudo-Skalar ist.

Letzteres folgt auch aus der Tatsache dass $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ein Pseudo-Tensor ist, und dass $F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}$ (als Produkt zweier Zeit-Pseudo-Tensoren) ein eigentlicher Tensor ist, denn daraus folgt nun dass $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}$ ein Pseudo-Skalar ist.