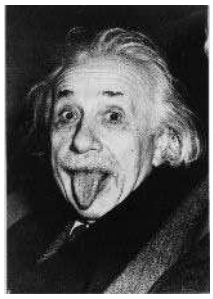
Formelsammlung Klassische Feldtheorie



9 Noether-Theorem: Symmetrien und erhaltene Ströme / Ladungen

Vorbemerkung: im Folgenden werden wir nur einige Spezialfälle des allgemeinen Noether-Theorems betrachten bei denen die Symmetrien der Wirkung entweder durch lokale Transformationen der abhängigen Variablen gegeben sind, $\phi(x) \to \bar{\phi}(x) = \phi(x) + \Delta\phi(x)$, oder durch Translationen der unabhängigen Variablen (Koordinaten) induziert werden, $\Delta x^\mu = \epsilon^\mu \Rightarrow \Delta\phi = \epsilon^\mu \partial_\mu \phi$. In beiden Fällen gilt $\Delta\partial_\mu\phi = \partial_\mu\Delta\phi$. Um die Konsequenzen allgemeiner Symmetrie-Transformationen (z.B. Lorentz-Transformationen) zu analysieren, ist eine sorgfältigere Formulierung des Noether-Theorems notwendig (Unterscheidung zwischen substanziellen und lokalen Variationen (Schröder, Kapitel 7.9) bzw. schrägen und geraden Variationen (Sexl & Urbantke, Kapitel 10-11), Transformation des Volumenselements d^4x und des Integrationsgebiets etc.). Dies werden wir hier nicht betrachten. Aber es lohnt sich, dies genau zu studieren, denn das Noether-Theorem ist eine der wichtigsten Grundlagen der modernen theoretischen Physik!

1. Noether-Theorem in der Mechanik

   Sei $S[q] = \int dt L(q^a, \dot{q}^a; t)$ die Wirkung. Für eine Variation $q^a(t) \to q^a(t) + \delta q^a(t)$ gilt allgemein

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q^a}\delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\delta \dot{q}^a \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)\delta q^a + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\delta q^a\right) \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) Sei jetzt konkret $q^a(t) \to q^a(t) + \Delta q^a(t)$ eine Variation die L bis auf eine totale Zeitableitung invariant lässt,

$$\Delta L = \frac{d}{dt} f_\Delta(q^a; t) \ . \tag{2}$$

   Dann folgt dass es für jede Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen eine Erhaltungsgrösse Q_Δ gibt,

$$Q_\Delta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\Delta q^a - f_\Delta = p_a \Delta q^a - f_\Delta \quad , \quad \frac{d}{dt} Q_\Delta = 0 \ . \tag{3}$$

   (b) Wir betrachten jetzt die durch Zeittranslationen $t \to t + \epsilon$ induzierte Transformation $\Delta q^a = \dot{q}^a$ (ϵ hier und in den folgenden Gleichungen unterdrückt). Dann gilt

$$\Delta L = \frac{d}{dt} L \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \ . \tag{4}$$

   In diesem Fall hat man konkret die Erhaltungsgrösse

$$Q_\Delta = p_a \dot{q}^a - L = H \ . \tag{5}$$

2. Noether-Theorem in der Klassischen Feldtheorie

Sei $S[\phi] = \int d^4x L(\phi^A, \partial_\alpha \phi^A; x^\alpha)$ die Wirkung. Für eine Variation $\phi^A(x) \to \phi^A(x) + \delta\phi^A(x)$ gilt allgemein

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial \phi^A}\delta\phi^A + \frac{\partial L}{\partial \partial_\alpha \phi^A}\delta\partial_\alpha\phi^A \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial \phi^A} - \frac{d}{dx^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \partial_\alpha \phi^A}\right)\delta\phi^A + \frac{d}{dx^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial \partial_\alpha \phi^A}\delta\phi^A\right) \end{aligned} \tag{6}$$

(a) Sei jetzt konkret $\phi^A(x) \to \phi^A(x) + \Delta\phi^A(x)$ eine Variation die L bis auf eine totale Ableitung invariant lässt,

$$\Delta L = \frac{d}{dx^\alpha} f^\alpha_\Delta(\phi^A, x) \ . \tag{7}$$

Dann folgt dass es für jede Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen einen erhaltenen Strom J^α_Δ gibt,

$$J^\alpha_\Delta = \frac{\partial L}{\partial \partial_\alpha \phi^A}\delta\phi^A - f^\alpha_\Delta \quad , \quad \frac{d}{dx^\alpha} J^\alpha_\Delta = 0 \tag{8}$$

(b) Einem Strom J^α kann man eine Ladung zuordnen, indem man die Stromdichte J^0 über den Raum integriert,

$$Q_\Delta(t) := \int d^3x \ J^0_\Delta(t, \vec{x}) \tag{9}$$

Diese Ladung ist erhalten wenn der Strom erhalten ist und die räumlichen Komponenten im Unendlichen verschwinden,

$$\frac{d}{dt} Q_\Delta(t) \sim \int d^3x (\partial_i J^i_\Delta) \sim \oint_\infty J^i = 0 \ . \tag{10}$$

(c) Beispiel: Komplexes Skalarfeld Φ

$$S[\Phi] = \int d^4x \ \left(-\tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi^*\partial_\beta\Phi - V(\Phi^*\Phi)\right) \tag{11}$$

Lagrangefunktion ist invariant unter der Rotation

$$\left(\Phi \to \mathrm{e}^{i\gamma}\Phi, \Phi^* \to \mathrm{e}^{-i\gamma}\Phi^*\right) \quad , \quad \text{infinitesimal:} \quad (\delta\Phi = i\gamma\Phi, \delta\Phi^* = -i\gamma\Phi^*) \tag{12}$$

Der zugehörige erhaltene Strom lautet (unabhängig vom Potential)

$$J^\alpha = (i/2)\left(\Phi^*\partial^\alpha\Phi - \Phi\partial^\alpha\Phi^*\right) \tag{13}$$

(d) Wir betrachten jetzt die durch Raum-Zeit-Translationen $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu$ induzierten Transformationen $\Delta_\mu\phi^A = \partial_\mu\phi^A$. Dann gilt

$$\Delta_\mu L = \frac{d}{dx^\mu} L \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \ . \tag{14}$$

Hängt L nicht explizit von den Koordinaten ab, hat man also die 4 erhaltenen Ströme

$$J^\alpha_{(\mu)} = \frac{\partial L}{\partial \partial_\alpha \phi^A}\partial_\mu\phi^A - \delta^\alpha_\mu L \equiv \Theta^\alpha_{\ \mu} \quad , \quad \partial_\alpha J^\alpha_{(\mu)} = \partial_\alpha \Theta^\alpha_{\ \mu} = 0 \ . \tag{15}$$

3. Der Kanonische Energie-Impuls-Tensor $\Theta^\alpha_{\ \mu}$

   (a) Diese 4 Ströme bilden offensichtlich einen (1,1)-Tensor, den *kanonischen Energie-Impuls-Tensor* $\Theta^\alpha_{\ \mu}$.

$$\Theta^\alpha_{\ \mu} = \frac{\partial L}{\partial \partial_\alpha \phi^A} \partial_\mu \phi^A - \delta^\alpha_\mu L \tag{16}$$

   (b) Da $\partial_\alpha \Theta^\alpha_{\ \mu} = 0$, führt dies zu den erhaltenen Ladungen

$$P_\mu := \int d^3x \Theta^0_{\ \mu} \tag{17}$$

   Interpretation: P_0 Energie (Zeit-Translationsinvarianz) und P_k Impuls (Raum-Translationsinvarianz)

   (c) Die Kontinuitätsgleichung $\partial_\alpha \Theta^\alpha_{\ \mu} = 0$ führt dann zu der Interpretation

   - $\Theta^0_{\ 0}$ Energiedichte
   - $\Theta^i_{\ 0}$ Energiestromdichte
   - $\Theta^0_{\ k}$ Impulsdichte
   - $\Theta^i_{\ k}$ Impulsstromdichte oder Spannungstensordichte

   Insbesondere ist die Energiedichte (wie im Fall der Mechanik)

$$\Theta^0_{\ 0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^A} \dot{\phi}^A - L \tag{18}$$

   die Legendre-Transformation der Lagrangefunktion (Lagrangedichte).

   (d) Beispiel: Reelles Skalarfeld ϕ

$$S[\phi] = \int d^4x \ \left(-\tfrac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right) \tag{19}$$

   Der kanonische Energie-Impulstensor ist

$$\Theta_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \tfrac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} \partial_\gamma \phi \partial_\delta \phi + \tfrac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} V(\phi) \tag{20}$$

   Er ist symmetrisch und erhalten.

   (e) Beispiel Maxwell-Theorie

$$S[A] = -\tfrac{1}{4} \int d^4x \ F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \tag{21}$$

   Der kanonische Energie-Impulstensor ist (für eine Lösung der Vakuum-Maxwellgleichung)

$$\Theta_{\alpha\beta} = -F_{\alpha\gamma} F_\beta^{\ \gamma} + \tfrac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} - \partial_\gamma (F_\alpha^{\ \gamma} A_\beta) \tag{22}$$

   Er ist erhalten, aber weder symmetrisch noch eichinvariant. Er unterscheidet sich von dem symmetrischen, erhaltenen und eichinvarinaten *kovarianten* Energie-Impuls-Tensor $T_{\alpha\beta}$ um den letzten (identisch erhaltenen) Term,

$$T_{\alpha\beta} = -F_{\alpha\gamma} F_\beta^{\ \gamma} + \tfrac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \tag{23}$$