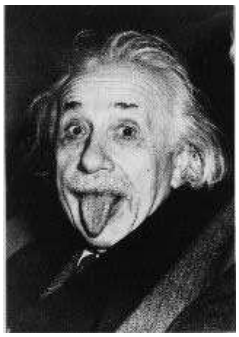

KFT Übungen 04

1. Lorentz-Invarianten

   (a) Berechne die Invarianten (eichinvariante Lorentz-Skalare) $I_1 = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ und $I_2 = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta}$ und schliesse daraus dass wenn in einem Inertialsystem $\vec{E} = 0$ dass dann in jedem Inertialsystem gilt $\vec{E}.\vec{B} = 0$ und $|\vec{E}| < |\vec{B}|$ (in Einheiten mit $c = 1$).

   (b) Zeige dass I_2 eine totale Ableitung ist wenn $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, d.h. dass es dann einen Vektor C^α gibt so dass $I_2 = \partial_\alpha C^\alpha$. Ist C^α eichinvariant?

   Bemerkung: Die potentielle kubische Invariante $I_3 = F^{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} F^\gamma_\alpha = 0$ (folgt allein aus der Antisymmetrie von $F_{\alpha\beta}$), und die quartische Invariante $I_4 = F^{\alpha\beta} F_{\beta\gamma} F^{\gamma\delta} F_{\delta\alpha}$ ist eine Linearkombination von $(I_1)^2$ und $(I_2)^2$. Beweise dieser Behauptungen als optionale Zusatzaufgabe.

2. Lorentztransformationen von $\vec{B}$: Bestimme aus

$$\bar{F}_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma_\alpha \Lambda^\delta_\beta F_{\gamma\delta} \tag{1}$$

   das Transformationsverhalten der Komponenten B_i des magnetischen Feldes unter der Lorentztransformation

$$\left(L^\alpha_\beta\right) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha & 0 & 0 \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$