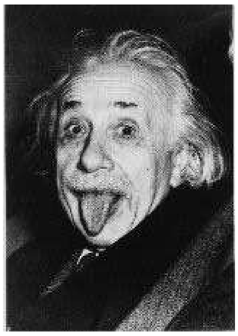

KFT ÜBUNGEN 02

1. WIRKUNG FÜR EIN FREIES TEILCHEN

   Die Wirkung für ein freies Teilchen ist

$$
\begin{aligned}
S[x] &= -mc^2 \int d\tau = -mc^2 \int d\lambda (d\tau/d\lambda) \equiv \int d\lambda\, L_\lambda \\
L_\lambda &= -mc^2 \frac{d\tau}{d\lambda} = -mc^2 \left(-\frac{1}{c^2} \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right)^{1/2} = -mc \left(-\eta_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{1}
$$

   (a) Zeige dass, unabhängig von der Wahl der Parametrisierung durch λ, für die *kovarianten Impulse* gilt

$$p_\alpha := \frac{\partial L_\lambda}{\partial x'^\alpha} = m u_\alpha \quad \text{mit} \quad u_\alpha = \eta_{\alpha\beta} u^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \tag{2}$$

   (b) In der Vorlesung haben wir die Bewegungsgleichung für ein freies relativistisches Teilchen direkt aus der Variation der Wirkung hergeleitet. Zeige hier, dass diese Gleichung (natürlich) auch aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgt,

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L_\lambda}{\partial x'^\alpha} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^\alpha = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0 \ . \tag{3}$$

   (c) Wähle als Parameter $\lambda = t$ die Zeitkoordinate in einem Inertialsystem mit Koordinaten $(x^0 = ct, x^k)$, bestimme die *kanonischen Impulse*

$$p_k^{(c)} = \frac{\partial L_t}{\partial v^k} \tag{4}$$

   $(v^k = dx^k(t)/dt)$. Zeige dass diese identisch zu den räumlichen Komponenten p_k der kovarianten Impulse sind,

$$p_k^{(c)} = p_k \ , \tag{5}$$

   und dass für die dazugehörige *kanonische Hamilton-Funktion* H, d.h. die Legendre-Transformation von L_t, gilt dass $H = E$ die relativistische Energie ist,

$$H = p_k^{(c)} v^k - L_t = m\gamma(v)c^2 = E \ . \tag{6}$$