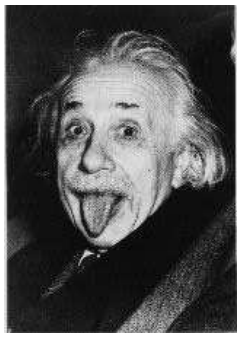

KFT Übungen 04

1. Die Homogenen Maxwell-Gleichungen

   (a) Sei $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Zeige dass

   $$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \equiv 0 \tag{1}$$

   identisch erfüllt ist. [2-Zeilen Rechnung]

   (b) Sei jetzt $F_{\alpha\beta}$ der in Aufgabe 03.1b berechnete Tensor (Komponenten ausgedrückt durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$). Zeige dass (1) zu den homogenen Maxwell-Gleichungen äquivalent ist.
   [Hinweis: betrachte separat die Fälle wo (i) zwei der Indizes in (1) gleich sind, (ii) alle 3 Indizes räumliche Indizes sind, (iii) zwei der Indizes räumlich sind.]

2. Der duale Feldstärketensor: der duale Feldstärketensor ist durch

   $$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} \tag{2}$$

   ($\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ total antisymmetrisch, $\epsilon^{0123} = -1$) definiert, so dass (s. Bemerkungen im Anhang)

   $$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \ . \tag{3}$$

   Zeige nun alternativ dazu direkt, dass $\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0$ die homogenenen Maxwell-Gleichungen sind, d.h. bestimme (mit $F_{0i} = -E_i/c$, $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$), die Komponenten von $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ und zeige dass

   $$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \ . \tag{4}$$

3. Lorentz-Invarianten

   (a) Berechne die Invarianten (eichinvariante Lorentz-Skalare) $I_1 = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ und $I_2 = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta}$ und schliesse daraus dass wenn in einem Inertialsystem $\vec{E} = 0$ dass dann in jedem Inertialsystem gilt $\vec{E}.\vec{B} = 0$ und $|\vec{E}| < |\vec{B}|$ (in Einheiten mit $c = 1$).

   (b) Zeige dass I_2 eine totale Ableitung ist wenn $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, d.h. dass es dann einen Vektor C^α gibt so dass $I_2 = \partial_\alpha C^\alpha$. Ist C^α eichinvariant?