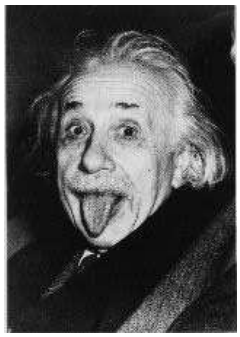

KFT Übungen 05

Klassische Feldtheorie: Skalarfelder

1. In der Elektrostatik ist die Energiedichte des elektrischen Feldes proportional zu

$$\rho_{\mathcal{E}}(\phi) = \tfrac{1}{2}\vec{E}^2 = \tfrac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\phi\right)^2 \quad , \tag{1}$$

und die elektrostatische Gesamtenergie ist

$$\mathcal{E}[\phi] = \int d^3x \; \rho_{\mathcal{E}}(\phi) \quad . \tag{2}$$

Zeige

$$\mathcal{E} \quad \text{extremal (minimal)} \quad \Leftrightarrow \quad \phi \quad \text{erfüllt die Laplace-Gleichung} \quad \Delta\phi = 0 \quad . \tag{3}$$

2. Die Wirkung für zwei reelle Skalarfelder $\{\Phi_a\} = \{\Phi_1, \Phi_2\}$ laute

$$S[\Phi_a] = \int d^4x \; \left[-\tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi^a\partial_\beta\Phi^b\delta_{ab} - V(\Phi_1, \Phi_2)\right] \quad . \tag{4}$$

Leite aus dieser Wirkung durch Variation $\Phi_a \to \Phi_a + \delta\Phi_a$ die Bewegungsgleichungen für Φ_1 und Φ_2 her.

3. Seien $L_1(\phi, \partial_\alpha\phi; x)$ und

$$L_2(\phi, \partial_\alpha\phi; x) = L_1(\phi, \partial_\alpha\phi; x) + \frac{d}{dx^\alpha}W^\alpha(\phi; x) \tag{5}$$

zwei Wirkungen für ein reelles Skalarfeld ϕ (die möglicherweise explizit von den Koordinaten x^α abhängen). Hier ist d/dx^α die totale Ableitung

$$\frac{d}{dx^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial\phi(x)} + \dots \tag{6}$$

die sowohl auf die explizite als auch auf die implizite x-Abhängigkeit wirkt.

Zeige dass die Euler-Lagrange Gleichungen für L_1 und L_2 identisch sind, d.h. dass die Euler-Lagrange Gleichungen für eine totale Ableitung dW^α/dx^α identisch erfüllt sind.