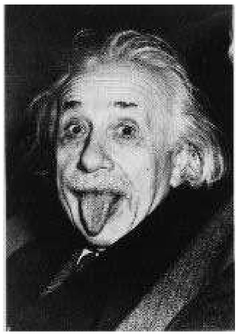

KFT Übungen 06

1. Der Noether Energie-Impuls Tensor

   Der Noether Energie-Impuls Tensor für eine Lagrangesche Feldtheorie mit Lagrangefunktion L ist

   $$\Theta^a_{\ b} = -\frac{\partial L}{\partial(\partial_a \Phi^A)} \partial_b \Phi^A + \delta^a_b L \ . \tag{1}$$

   Zeige dass dieser für eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichungen erhalten ist, wenn L nicht explizit von den Koordinaten abhängt.

2. Der Noether Energie-Impuls Tensor für ein Skalarfeld

   Die Wirkung für ein Skalarfeld ϕ ist

   $$S[\phi] = \int d^4x \left(-\tfrac{1}{2}\eta^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi - V(\phi)\right) \equiv \int d^4x \left(-\tfrac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)\right) \ . \tag{2}$$

   Leite die Bewegungsgleichungen und den Energie-Impulstensor her und zeige explizit (d.h. ohne Dich auf Aufgabe 1 zu berufen ;-)), dass er für eine Lösung der Bewegungsgleichungen erhalten ist.

3. Der Maxwell Energie-Impuls-Tensor

   Der kovariante Energie-Impuls-Tensor der Maxwell-Theorie ist

   $$T_{ab} = F_{ac}F_b^{\ c} - \tfrac{1}{4}\eta_{ab}F_{cd}F^{cd} \ . \tag{3}$$

   (a) Zeige dass T_{ab} sich für Lösung der Vakuum-Maxwellgleichungen von dem (nicht eichinvarianten und nicht symmetrischen) Noether Energie-Impuls Tensor der Maxwell-Theorie um einen identisch erhaltenen Term unterscheidet.

   (b) Für jedes beliebige Tensorfeld sind die Translationsvariationen durch

   $$\delta_T \Phi^A(x) = -\epsilon^b \partial_b \Phi^A(x) \tag{4}$$

   definiert. Betrachte nun für ein Eichfeld $A_c(x)$ die modifizierten (eichinvarianten) Translationsvariationen

   $$\Delta_T A_c = \delta_T A_c + \partial_c(\epsilon^b A_b) = -\epsilon^b F_{bc} \ , \tag{5}$$

   die sich von den $\delta_T A_c$ nur um eine Eichtransformation (mit Parameter $\Psi = \epsilon^b A_b$) unterscheiden. Zeige

   $$\Delta_T F_{cd} = -\epsilon^b \partial_b F_{cd} = \delta_T F_{cd} \ . \tag{6}$$

(c) Zeige dass T_{ab} direkt aus dem Noether-Theorem folgt, wenn man anstatt der Variationen $\delta_T A_c$ die Variationen $\Delta_T A_c$ verwendet.

(d) Zeige dass T_{ab} symmetrisch und spurfrei ist.

(e) Zeige dass aus den Maxwell-Gleichungen folgt

$$\partial_{[a} F_{bc]} = 0 \quad , \quad \partial_a F^{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^a T_{ab} = 0. \tag{7}$$

[Hinweis: Ja, Verifikation dieser Gleichung erfordert tatsächlich beide Sätze von Maxwellgleichungen. Richtig gemacht ist das eine kurze 4 Zeilen Rechnung, schlecht gemacht kann man sich dabei ewig im Kreis drehen - diese Aufgabe ist daher ein exzellenter Test für Euch um zu sehen ob ihr den Formalismus beherrscht.]

Bemerkungen:

1. Dies ist das letzte Übungsblatt für diese Vorlesung.

2. Wichtigste Voraussetzung für ein gutes Abschneiden bei der Prüfung ist Kenntnis und Verständnis aller Übungsaufgaben (denn sooo viele Dinge gibt es ja nicht die ich bei einer schriftlichen Prüfung fragen kann . . .)

3. "Verständnis" heisst auch, dass Ihr Dinge die richtig gemacht n-Zeilen-"Rechungen" sind auch tatsächlich in maximal n Minuten lösen könnt (und nicht erst lange nachdenken müsst oder zufällig nach einigen Seiten Rechnung zum vielleicht richtigen Ergebnis kommt).