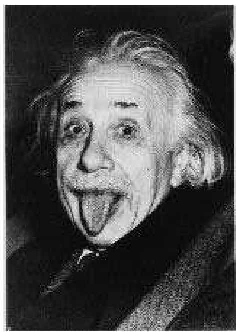

KFT Übungen 01

1. Die Lorentz-Gruppe

   Lorentz-Transformationen sind die linearen Transformationen $\bar{x}^\alpha = L^\alpha_{\ \beta}\, x^\beta$ die das Minkowski Abstandsquadrat invariant lassen:

   $$\eta_{\alpha\beta}\bar{x}^\alpha\bar{x}^\beta = \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{\alpha\beta}L^\alpha_{\ \gamma}L^\beta_{\ \delta} = \eta_{\gamma\delta} \quad \Leftrightarrow \quad L^T\eta L = \eta \tag{1}$$

   Zeige dass aus dieser Definition folgt

   $$\begin{aligned} L^T\eta L &= \eta & &\Rightarrow \quad \det(L) = \pm 1 \\ (L^T\eta L)_{00} &= \eta_{00} & &\Rightarrow \quad |L^0_{\ 0}| \geq 1 \end{aligned} \tag{2}$$

   Bemerkung:

   Die Lorentz-Transformationen

   $$\mathcal{L} = \{L : L^T\eta L = \eta\} \tag{3}$$

   bilden eine Gruppe unter Matrix-Multiplikation, d.h.

   $$\begin{aligned} &L_1, L_2 \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad L_1L_2 \in \mathcal{L} \\ &L \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \exists L^{-1} \in \mathcal{L} : \quad LL^{-1} = L^{-1}L = \mathbb{I} \end{aligned} \tag{4}$$

   (die anderen Bedingungen für eine Gruppe, Assoziativität und $\mathbb{I} \in \mathcal{L}$ sind trivial erfüllt).

   Die Transformationen mit $\det L = +1$ und $L^0_{\ 0} \geq 1$ bilden eine zusammenhängende Untergruppe der Lorentz-Gruppe, bestehend aus Rotationen und boosts (Geschwindigkeitstransformationen, hyperbolische Rotationen), aber ohne Zeit- oder Raum-Spiegelungen. Diese Untergruppe (technisch die Gruppe der eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen) wird oft einfach nur als *die Lorentz-Gruppe* bezeichnet, und bis auf weiteres folgen wir der Terminologie.

2. Tensor-Algebra: Lorentz-Tensoren

   (a) Sei u_α ein Lorentz-Kovektor und $T^{\alpha\beta}$ ein zweifach kontravarianter Tensor($(2,0)$-Tensor). Zeige dass $T^{\alpha\beta}u_\beta$ ein Lorentz-Vektor ist.

(b) Sei $T^\alpha_{\ \beta}$ ein Lorentz-(1,1)-Tensor. Zeige dass seine Spur $T^\alpha_{\ \alpha}$ ein Lorentz-Skalar ist.

Bemerkung:

In gleicher Weise kann man allgemein zeigen, dass die Kontraktion eines (p, q)-Tensors (Summation über einen beliebigen oberen (kontravarianten) und einen beliebigen unteren (kovarianten) Index) ein $(p-1, q-1)$-Tensor ist.

3. Tensor-Analysis: Lorentz-Tensorfelder und ihre Ableitungen

Sei $f = f(x)$ ein Lorentz-Skalar(feld), $V^\alpha = V^\alpha(x)$ ein 4er-Vektor(feld) (Lorentz-Vektor, (1,0)-Tensor), $V_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V^\beta$ der zugehörige Kovektor, und $\partial_\alpha = \partial_{x^\alpha}$ die partielle Ableitung.

(a) Zeige dass $\partial f / \partial x^\alpha$ sich wie ein Kovektor transformiert, d.h. (wegen der Invarianz von f) dass

$$d\bar{x}^\alpha = L^\alpha_{\ \beta} dx^\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} = \Lambda_\alpha^{\ \beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \tag{5}$$

mit

$$\Lambda_\alpha^{\ \beta} = (L^{-1})^\beta_{\ \alpha} \quad \text{oder} \quad \Lambda = (L^{-1})^t \ . \tag{6}$$

Es ist daher konsistent mit unserer Notation für Kovektoren, die partiellen Ableitungen als

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} f \equiv \partial_\alpha f \tag{7}$$

abzukürzen.

(b) Wie transformieren sich (d.h. von welchem Tensortyp sind) dann

$$V^\alpha \partial_\alpha f \quad , \quad V^\alpha \partial_\beta f \quad , \quad \partial_\alpha V^\alpha \quad , \quad f \partial_\alpha V^\alpha \quad , \quad \partial_\alpha V_\beta \quad , \quad \partial_\alpha \partial_\beta f \quad , \quad V^\alpha \partial_\beta V_\alpha \tag{8}$$

(5 Sekunden pro Antwort ...)