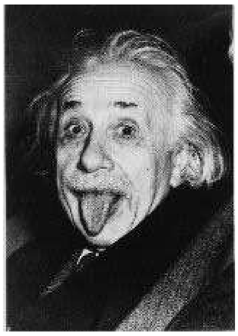

KFT Übungen 06

1. Komplexes Skalarfeld II: Phaseninvarianz und Noether-Theorem

   Das Potential in Aufgabe 05.2 sei eine Funktion von $\Phi^*\Phi = (\phi_1)^2 + (\phi_2)^2$,

$$S[\Phi] = \int d^4x \left(-\tfrac{1}{2}\eta^{ab}\partial_a\Phi\partial_b\Phi^* - W(\Phi^*\Phi)\right) \quad . \tag{1}$$

   Zeige:

   (a) Die Wirkung ist invariant unter (globalen, konstanten) Phasentransformationen von Φ,

$$\Phi(x) \to \mathrm{e}^{i\theta}\Phi(x) \quad , \quad \Phi^*(x) \to \mathrm{e}^{-i\theta}\Phi^*(x) \tag{2}$$

   (äquivalent zu Rotationen von ϕ_1, ϕ_2).

   (b) Bestimme den entsprechenden Noether-Strom und zeige explizit dass er für eine Lösung der Bewegungsgleichungen erhalten ist.

2. Komplexes Skalarfeld III: Eichinvarianz und Minimale Kopplung

   Die Wirkung in Aufgabe 1 ist *nicht* invariant unter lokalen (x-abhängigen) Phasentransformationen (*Eichtransformationen*)

$$\Phi(x) \to \mathrm{e}^{i\theta(x)}\Phi(x) \quad , \quad \Phi^*(x) \to \mathrm{e}^{-i\theta(x)}\Phi^*(x) \tag{3}$$

   weil die Ableitung von Φ nicht nur mit einer Phase transformiert,

$$\partial_a\Phi \to \partial_a(\mathrm{e}^{i\theta}\Phi) = \mathrm{e}^{i\theta}(\partial_a\Phi + i(\partial_a\theta)\Phi) \tag{4}$$

   Um den (störenden) zweiten Termin zu kompensieren, muss man ein weiteres Feld einführen, dass sich in geeigenter Weise unter Eichtransformationen mit $\partial_a\theta$ transformiert: ein *Eichfeld* $A_a(x)$ mit

$$A_a(x) \to A_a(x) + \partial_a\theta(x) \quad . \tag{5}$$

   Man definiert nun die *(eich-)kovariante Ableitung* $D_a\Phi$ von Φ durch

$$D_a\Phi = \partial_a\Phi - iA_a\Phi \quad , \quad D_a\Phi^* = \partial_a\Phi^* + iA_a\Phi^* \quad . \tag{6}$$

   Zeige:

(a) Unter kombinierten Eichtransformationen von Φ und A_a transformiert sich die kovariante Ableitung "schön" ("kovariant"),

$$D_a\Phi(x) \to \mathrm{e}^{i\theta(x)} D_a\Phi(x) \quad . \tag{7}$$

(b) Die Wirkung (minimale Kopplung von Φ an das Eichfeld)

$$S[\Phi, A] = \int d^4x \left(-\tfrac{1}{2}\eta^{ab} D_a\Phi D_b\Phi^* - W(\Phi\Phi^*) \right) \tag{8}$$

ist eichinvariant.

(c) (optionale Zusatzaufgabe) Betrachte die Wirkung

$$S = S_{\mathrm{Maxell}}[A] + S[\Phi, A] \quad , \tag{9}$$

leite die Bewegungsgleichung für A_a her, d.h. bestimme den Strom J^b in $\partial_a F^{ab} = -J^b$), und zeige dass er für eine Lösung der Bewegungsgleichungen für Φ erhalten ist.