KFT Übungen 01

1. Die Lorentz-Gruppe

   Lorentz-Transformationen sind die linearen Transformationen $\bar{x}^a = L^a_{\ b}\, x^b$ die das Minkowski Abstandsquadrat invariant lassen:

   $$\eta_{ab}\bar{x}^a\bar{x}^b = \eta_{ab}x^a x^b \quad \forall\, x^a \quad \Leftrightarrow \quad \eta_{ab}L^a_{\ c}L^b_{\ d} = \eta_{cd} \quad \Leftrightarrow \quad L^T\eta L = \eta \tag{1}$$

   [Vergewissert Euch dass Ihr die Äquivalenz dieser 3 Formulierungen versteht!]

   (a) Zeige dass aus der Definition folgt

   $$\begin{aligned} L^T\eta L = \eta \qquad & \Rightarrow \quad \det(L) = \pm 1 \\ (L^T\eta L)_{00} = \eta_{00} \qquad & \Rightarrow \quad |L^0_{\ 0}| \geq 1 \end{aligned} \tag{2}$$

   (b) Zeige dass die Lorentz-Transformationen

   $$\mathcal{L} = \{L : L^T\eta L = \eta\} \tag{3}$$

   eine Gruppe unter Matrix-Multiplikation bilden, d.h.

   $$\begin{aligned} & L_1, L_2 \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad L_1 L_2 \in \mathcal{L} \\ & L \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \exists L^{-1} \in \mathcal{L} : \quad LL^{-1} = L^{-1}L = \mathbb{1} \end{aligned} \tag{4}$$

   (die anderen Bedingungen für eine Gruppe, Assoziativität und Existenz des Einheitselements, $\mathbb{1} \in \mathcal{L}$, sind trivial erfüllt).

   (c) Zeige dass für eine infinitesimale Lorentz-Transformation

   $$L = \mathbb{1} + \omega \quad \Leftrightarrow \quad L^a_{\ b} = \delta^a_{\ b} + \omega^a_{\ b} \tag{5}$$

   (d.h. wir vernachlässigen Terme quadratisch in ω) die Bedingung $(\eta\omega)^T = -(\eta\omega)$ erfüllt sein muss und dass diese Bedingung in Komponenten äquivalent ist zu

   $$(\eta\omega)^T = -(\eta\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{ab} \equiv \eta_{ac}\omega^c_{\ b} = -\omega_{ba} \quad . \tag{6}$$

Bemerkung: Die Transformationen mit $\det L = +1$ und $L^0_{\ 0} \geq 1$ bilden eine zusammenhängende Untergruppe der Lorentz-Gruppe, bestehend aus Rotationen und boosts (Geschwindigkeitstransformationen, hyperbolische Rotationen), aber ohne Zeit- oder Raum-Spiegelungen. Diese Untergruppe (technisch die Gruppe der eigentlichen orthochronen Lorentz-Transformationen) wird oft einfach nur als *die Lorentz-Gruppe* bezeichnet, und bis auf weiteres folgen wir der Terminologie.