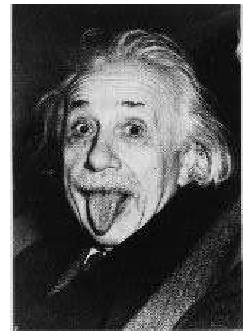

KFT Übungen 02

1. Tensor-Algebra: Lorentz-Tensoren

   Unter Lorentz-Tranformationen $\bar{x}^a = L^a{}_b x^b$ transformieren sich Vektoren v^a und Kovektoren u_a als

$$\bar{v}^a = L^a{}_b v^b \quad , \quad \bar{u}_a = \Lambda_a{}^b u_b \tag{1}$$

   wobei

$$\Lambda_a^b L^a_c = \delta^b_c \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda = (L^T)^{-1} \ . \tag{2}$$

   [Vergewissert Euch dass Ihr die Äquivalenz dieser 2 Formulierungen versteht!]

   (a) Sei u_a ein Lorentz-Kovektor und T^{ab} ein zweifach kontravarianter Tensor($(2,0)$-Tensor). Zeige dass $T^{ab}u_b$ ein Lorentz-Vektor ist.

   (b) Sei T^a_b ein Lorentz-(1,1)-Tensor. Zeige dass seine Spur T^a_a ein Lorentz-Skalar ist.

   Bemerkung: In gleicher Weise kann man allgemein zeigen, dass die Kontraktion eines (p,q)-Tensors (Summation über einen beliebigen oberen (kontravarianten) und einen beliebigen unteren (kovarianten) Index) ein $(p-1,q-1)$-Tensor ist.

2. Tensor-Analysis: Lorentz-Tensorfelder und ihre Ableitungen

   Sei $f = f(x)$ ein Lorentz-Skalar(feld), $V^a = V^a(x)$ ein 4er-Vektor(feld) (Lorentz-Vektor, (1,0)-Tensor), U_a ein Kovektor(feld), und $\partial_a = \partial_{x^a}$ die partielle Ableitung.

   (a) Zeige dass $\partial f / \partial x^a$ sich wie ein Kovektor transformiert, d.h.

$$d\bar{x}^a = L^a_b dx^b \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \bar{x}^a} = \Lambda_a^b \frac{\partial}{\partial x^b} \tag{3}$$

   Es ist daher konsistent mit unserer Notation für Kovektoren, die partiellen Ableitungen als

$$\frac{\partial}{\partial x^a} f \equiv \partial_a f \tag{4}$$

   abzukürzen.

   (b) Wie transformieren sich (d.h. von welchem Tensortyp sind) dann

$$V^a \partial_a f \quad , \quad V^a \partial_b f \quad , \quad \partial_a V^a \quad , \quad f \partial_a V^a \quad , \quad \partial_a U_b \quad , \quad \partial_a \partial_b f \quad , \quad V^a \partial_b U_a \tag{5}$$

   (wenn ihr Aufgabe 1 verstanden habt: maximal 5 Sekunden pro Antwort ...).