KFT Übungen 03

1. Teilchen mit konstanter Beschleunigung

   Betrachte die durch einen Parameter λ parametrisierte Kurve (Weltlinie) $x^a(\lambda)$,

   $$x^a(\lambda) = (g^{-1} \sinh g\lambda, g^{-1} \cosh g\lambda) \tag{1}$$

   in der $(x^0 = ct, x^1 = x)$-Ebene. Wir setzen hier zunächst $c = 1$.

   (a) Zeige dass die Weltlinie eine Hyperbel in dem "rechten" Quadranten $x^1 > |x^0|$ der Minkowski Raum-Zeit ist. Dadurch sieht man schon rein graphisch, dass diese Kurve zeitartig ist.

   (b) Bestätige dies durch Berechnung der Minkowski-Norm des Tangentialvektors $dx^a/d\lambda$.

   (c) Zeige dass der Parameter λ (bis auf eine natürlich unbestimmte additive Konstante) die Eigenzeit $\lambda = \tau$ des Teilchens ist.

   (d) Setze $\lambda = \tau$ und bestimme die 4er-Geschwindigkeit $u^a = u^a(\tau)$ und die 4er-Beschleunigung $a^a = a^a(\tau)$.

   (e) Zeige dass die Beschleunigung des Teilchens konstant ist in dem Sinn dass die Norm $a^a a_a$ der 4er-Beschleunigung τ-unabhängig ist.

   (f) g habe die Dimension einer Beschleunigung. Wie sehen die Gleichungen für $x^a(\tau), u^a(\tau)$ und $a^a(\tau)$ für $c \neq 1$ aus?
   Verwende im Folgenden dann die Ausdrücke für $c \neq 1$.

   (g) Schreibe die Koordinatengeschwindigkeit $v = dx/dt$ des beschleunigten Teilchens als Funktion $v(t)$ der Koordinatenzeit t (d.h. als Funktion der Zeit die im Inertialsystem mit den Koordinaten $x^0 = ct, x^1 = x$ angezeigt wird).

   (h) Vergleiche $v(t)$ mit der Geschwindigkeit eines Newtonschen Teilchens mit der gleichen konstanten Beschleunigung. Insbesondere:

   - welche Geschwindigkeit hat das relativistische Teilchen zu der Zeit $t = t_c$ zu der das Newtonsche Teilchen die Lichtgeschwindigkeit $v = c$ erreichen würde?
   - wie verhält sich $v(t)$ für $t \to \infty$?