KFT Übungen 04

1. Wirkung für ein freies Teilchen

   Die Wirkung für ein freies Teilchen ist

$$
\begin{aligned}
S[x] &= -mc^2 \int d\tau = -mc^2 \int d\lambda (d\tau/d\lambda) \equiv \int d\lambda\, L_\lambda \\
L_\lambda &= -mc^2 \frac{d\tau}{d\lambda} = -mc^2 \left(-\frac{1}{c^2} \eta_{ab} \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{dx^b}{d\lambda} \right)^{1/2} = -mc \left(-\eta_{ab} x'^a x'^b \right)^{1/2}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   (a) Zeige dass, unabhängig von der Wahl der Parametrisierung durch λ, für die *kovarianten Impulse* gilt

$$
p_a := \frac{\partial L_\lambda}{\partial x'^a} = m u_a \quad \text{mit} \quad u_a = \eta_{ab} u^b = \eta_{ab} \frac{dx^b}{d\tau} \tag{2}
$$

   (b) Die Bewegungsgleichung für ein freies relativistisches Teilchen kann natürlich direkt aus der Variation der Wirkung hergeleitet werden. Siehe die ausführliche Herleitung im Skript, Kapitel 4.4, und vergewissere Dich, dass Du die Herleitung zu 100 % (von mir aus 99 %) verstehst!

   (c) Zeige hier, dass diese Gleichung (natürlich) auch aus den Euler-Lagrange Gleichungen folgt,

$$
\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L_\lambda}{\partial x'^a} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial x^a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^a = \frac{d^2 x^a}{d\tau^2} = 0 \ . \tag{3}
$$

   (d) Wähle als Parameter $\lambda = t$ die Zeitkoordinate in einem Inertialsystem mit Koordinaten $(x^0 = ct, x^k)$, bestimme die *kanonischen Impulse*

$$
p_k^{(c)} = \frac{\partial L_t}{\partial v^k} \tag{4}
$$

   $(v^k = dx^k(t)/dt)$. Zeige dass diese identisch zu den räumlichen Komponenten p_k der kovarianten Impulse sind,

$$
p_k^{(c)} = p_k \ , \tag{5}
$$

   und dass für die dazugehörige *kanonische Hamilton-Funktion* H, d.h. die Legendre-Transformation von L_t, gilt dass $H = E$ die relativistische Energie ist,

$$
H = p_k^{(c)} v^k - L_t = m\gamma(v)c^2 = E \ . \tag{6}
$$

2. Noether-Theorem I: Allgemein

   Sei $L = L(x^a(\lambda), x'^a(\lambda); \lambda)$ eine Lagrangefunktion der "Pfade" $x^a(\lambda)$ und der "Geschwindigkeiten"

$$
x'^a(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} x^a(\lambda) \ . \tag{7}
$$

   Betrachte die Variation $x^a(\lambda) \to x^a(\lambda) + \delta x^a(\lambda)$.

(a) Leite die folgende Identität her (die *Variational Master Equation*):

$$\delta L = \mathcal{E}_a \delta x^a + \frac{d}{d\lambda}(p_a \delta x^a) \tag{8}$$

(2-Zeilen Argument), wobei $\mathcal{E}_a$ die Euler-Lagrange Gleichungen sind,

$$\mathcal{E}_a = \frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{d\lambda} p_a \quad , \quad p_a = \frac{\partial L}{\partial x'^a} \quad . \tag{9}$$

(b) Beweise das Noether-Theorem in der Form: "Sei $\delta_s x^a$ eine Symmetrie, d.h. eine Variation die die Lagrangefunktion invariant lässt, $\delta_s L = 0$; dann ist $Q = p_a \delta_s x^a$ eine Erhaltungsgrössse." (1-Zeilen Argument)

3. Noether-Theorem II: Freies Relativistisches Teilchen

Die Wirkung für ein freies Teilchen ist (mit $\lambda = \lambda(\tau)$ wie τ ein Lorentz-Skalar)

$$\begin{aligned} S[x] &= -mc^2 \int d\tau = -mc^2 \int d\lambda (d\tau/d\lambda) \equiv \int d\lambda \; L_\lambda \\ L_\lambda &= -mc^2 \frac{d\tau}{d\lambda} = -mc^2 \left(-\frac{1}{c^2} \eta_{ab} \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{dx^b}{d\lambda} \right)^{1/2} = -mc \left(-\eta_{ab} x'^a x'^b \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{10}$$

(a) Zeige explizit, dass die Lagrangefunktion L_λ unter infinitesimalen Poincaré-Transformationen

$$\delta_s x^a = \epsilon^a + \omega^a_{\ b} x^b \tag{11}$$

invariant ist ($\epsilon^a, \omega^a_{\ b}$ infinitesimal und konstant, $\omega_{ba} = -\omega_{ab}$).

Hinweis: das folgt am schnellsten aus der Identität $\delta L_\lambda = p_a \delta x'^a$ (für eine beliebige Variation δx^a), die ihr de facto bereits in Aufgabe 1a bewiesen habt.

(b) Bestimme die entsprechenden aus dem Noether-Theorem folgenden Erhaltungsgrössen.