KFT Übungen 06

1. Die Homogenen Maxwell-Gleichungen

   (a) Sei $G_{ab} = -G_{ba}$ ein (total) anti-symmetrisches Tensorfeld, $G_{ab} = G_{[ab]}$. Zeige dass

   $$H_{abc} = \partial_a G_{bc} + \partial_b G_{ca} + \partial_c G_{ab} \tag{1}$$

   auch total anti-symmetrisch ist, d.h. anti-symmetrisch in jedem Indexpaar,

   $$H_{abc} = H_{[abc]} \quad \Leftrightarrow \quad H_{abc} = -H_{bac} = -H_{cba} = -H_{acb} \ . \tag{2}$$

   (b) Sei jetzt $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$. Zeige dass

   $$\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0 \tag{3}$$

   identisch erfüllt ist. [2-Zeilen Rechnung oder Symmetrie-Argument]

   (c) Sei jetzt F_{ab} der in Aufgabe 05.1c berechnete Tensor (Komponenten ausgedrückt durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$), d.h.

   $$F_{0k} = -E_k/c \quad , \quad F_{ik} = \epsilon_{ikl} B_l \ . \tag{4}$$

   Zeige dass (3) zu den homogenen Maxwell-Gleichungen äquivalent ist,

   $$\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \ . \tag{5}$$

   [Hinweis: betrachte separat die Fälle wo (i) zwei der Indizes in (3) gleich sind, (ii) alle 3 Indizes räumliche Indizes sind, (iii) zwei der Indizes räumlich sind.]

2. Der Duale Feldstärketensor:

   Der duale Feldstärketensor ist durch

   $$\tilde{F}^{ab} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{abcd} F_{cd} \tag{6}$$

   (ϵ^{abcd} total antisymmetrisch, $\epsilon^{0123} = -1$) definiert.

   (a) Zeige dass

   $$\partial_a \tilde{F}^{ab} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0 \ . \tag{7}$$

   (b) Zeige nun auch direkt, dass $\partial_a \tilde{F}^{ab} = 0$ die homogenen Maxwell-Gleichungen sind, d.h. bestimme (mit $F_{0k} = -E_k/c$, $F_{ik} = \epsilon_{ikl} B_l$), die Komponenten von $\tilde{F}^{ab}$ und zeige dass

   $$\partial_a \tilde{F}^{ab} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \ . \tag{8}$$

3. Lorentz-Invarianten und Lorentz-Transformationen

(a) Berechne die Invarianten (eichinvariante Lorentz-Skalare) $I_1 = \frac{1}{4}F_{ab}F^{ab}$ und $I_2 = \frac{1}{4}F_{ab}\tilde{F}^{ab}$ als Funktionen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

Bemerkung: Die potentielle kubische Invariante $I_3 = F^{ab}F_{bc}F^{c}_{\ a} = 0$ (folgt allein aus der Antisymmetrie von F_{ab}), und die quartische Invariante $I_4 = F^{ab}F_{bc}F^{cd}F_{da}$ ist eine Linearkombination von $(I_1)^2$ und $(I_2)^2$. Beweise dieser Behauptungen als optionale (aber nicht besonders aufregende) Zusatzaufgabe.

(b) Schliesse daraus: wenn in einem Inertialsystem $\vec{E} = 0$, dann gilt in jedem Inertialsystem $\vec{E}.\vec{B} = 0$ und $|\vec{E}/c| < |\vec{B}|$.

(c) Zeige dass I_2 eine totale Ableitung ist wenn $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$, d.h. dass es dann einen Vektor C^a gibt so dass $\partial_a C^a = F_{ab}\tilde{F}^{ab}$. Ist C^a eichinvariant?

Bemerkung: Die Signifikanz dieser Tatsache wird sich uns/euch erst dann erschliessen, wenn wir über das Wirkungsprinzip für die Maxwell Theorie reden. Im Moment ist das einfach nur eine nützliche Fingerübung.

(d) Bestimme aus $\bar{F}_{ab} = \Lambda_a^{\ c}\Lambda_b^{\ d}F_{cd}$ das Transformationsverhalten der Komponenten $\bar{B}_i$ des magnetischen Feldes unter der Lorentztransformation

$$(L^a_{\ b}) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha & 0 & 0 \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$