

KFT ÜBUNGEN 07

1. Sei $L_1(\phi, \partial_\alpha \phi; x)$ die Wirkung für ein reelles Skalarfeld ϕ (die möglicherweise explizit von den Koordinaten x^a abhängt), und

$$L_2(\phi, \partial_a \phi; x) = L_1(\phi, \partial_a \phi; x) + \frac{d}{dx^a} W^a(\phi; x) \quad (1)$$

Hier ist d/dx^a die totale Ableitung

$$\frac{d}{dx^a} = \frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial \phi(x)} + \dots \quad (2)$$

die sowohl auf die explizite als auch auf die implizite x -Abhängigkeit wirkt.

Zeige dass die Euler-Lagrange Gleichungen für L_1 und L_2 identisch sind, d.h. dass die Euler-Lagrange Gleichungen für eine totale Ableitung dW^α/dx^α identisch erfüllt sind.

2. Komplexes Skalarfeld I: Wirkung und Bewegungsgleichungen

Sei

$$\begin{aligned} S[\Phi] &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \eta^{ab} \partial_a \Phi \partial_b \Phi^* - W(\Phi, \Phi^*) \right) \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \eta^{ab} \partial_a \phi_1 \partial_b \phi_1 - \frac{1}{2} \eta^{ab} \partial_a \phi_2 \partial_b \phi_2 - V(\phi_1, \phi_2) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

die (reelle) Wirkung für ein komplexes Skalarfeld $\Phi = \phi_1 + i\phi_2$ (ϕ_1 und ϕ_2 reelle Felder und $W(\Phi, \Phi^*) \equiv V(\phi_1, \phi_2)$ ein reelles Potential). Zeige:

- (a) Die Bewegungsgleichungen für ϕ_1 und ϕ_2 lauten

$$\square \phi_{1,2} = \frac{\partial V}{\partial \phi_{1,2}} \quad (4)$$

- (b) Diese Gleichungen sind äquivalent zu

$$\square \Phi = 2 \frac{\partial W}{\partial \Phi^*} \quad , \quad \square \Phi^* = 2 \frac{\partial W}{\partial \Phi} \quad (5)$$

- (c) Diese Gleichungen folgen direkt aus der Variation von $S[\Phi]$ (erste Zeile) wenn man (formal) $\delta \Phi$ und $\delta \Phi^*$ als unabhängige reelle Variationen behandelt/betrachtet.