

KFT ÜBUNGEN 08

1. Komplexes Skalarfeld II: Phaseninvarianz und Noether-Theorem

Das Potential in Aufgabe 07.2 sei eine Funktion von $\Phi^*\Phi = (\phi_1)^2 + (\phi_2)^2$, d.h. die Wirkung für ein komplexes Skalarfeld sei

$$S[\Phi] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\eta^{ab}\partial_a\Phi\partial_b\Phi^* - W(\Phi^*\Phi) \right) . \quad (1)$$

Zeige:

- (a) Die Wirkung ist invariant unter (globalen, konstanten) Phasentransformationen von Φ ,

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\theta}\Phi(x) \quad , \quad \Phi^*(x) \rightarrow e^{-i\theta}\Phi^*(x) \quad (2)$$

(äquivalent zu Rotationen von ϕ_1, ϕ_2).

- (b) Bestimme den entsprechenden Noether-Strom und zeige explizit dass er für eine Lösung der Bewegungsgleichungen erhalten ist.

2. Komplexes Skalarfeld III: Eichinvarianz und Minimale Kopplung

Die Wirkung in Aufgabe 1 ist *nicht* invariant unter lokalen (x -abhängigen) Phasentransformationen (*Eichtransformationen*)

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)}\Phi(x) \quad , \quad \Phi^*(x) \rightarrow e^{-i\theta(x)}\Phi^*(x) \quad (3)$$

weil die Ableitung von Φ nicht nur mit einer Phase transformiert,

$$\partial_a\Phi \rightarrow \partial_a(e^{i\theta}\Phi) = e^{i\theta}(\partial_a\Phi + i(\partial_a\theta)\Phi) \quad (4)$$

Um den (störenden) zweiten Termin zu kompensieren, muss man ein weiteres Feld einführen, dass sich in geeigneter Weise unter Eichtransformationen mit $\partial_a\theta$ transformiert: ein *Eichfeld* $A_a(x)$ mit

$$A_a(x) \rightarrow A_a(x) + \partial_a\theta(x) . \quad (5)$$

Man definiert nun die (*eich-*)kovariante Ableitung $D_a\Phi$ von Φ durch

$$D_a\Phi = \partial_a\Phi - iA_a\Phi \quad , \quad D_a\Phi^* = \partial_a\Phi^* + iA_a\Phi^* . \quad (6)$$

- (a) Zeige: unter kombinierten Eichtransformationen von Φ und A_a transformiert sich die kovariante Ableitung "schön" ("kovariant"),

$$D_a\Phi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)}D_a\Phi(x) . \quad (7)$$

- (b) Zeige: die Wirkung (minimale Kopplung von Φ an das Eichfeld)

$$S[\Phi, A] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\eta^{ab}D_a\Phi D_b\Phi^* - W(\Phi\Phi^*) \right) \quad (8)$$

ist eichinvariant.

(c) Betrachte die Wirkung

$$S = S_{\text{Maxwell}}[A] + S[\Phi, A] \quad , \quad (9)$$

leite die Bewegungsgleichung für A_a her, d.h. bestimme den Strom J^b in $\partial_a F^{ab} = -J^b$, und zeige dass er für eine Lösung der Bewegungsgleichungen für Φ erhalten ist.