KFT Übungen 05

$$\begin{aligned}
\text{Homogene Gleichungen:} \quad & \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \\
\text{Inhomogene Gleichungen:} \quad & \vec{\nabla}.\vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{J} \\
\text{Potentiale:} \quad & \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \\
\text{Eichtransformationen:} \quad & \phi \to \phi - \partial_t \Psi \quad , \quad \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi
\end{aligned}$$

1. Inhomogene Maxwell-Gleichungen und Potentiale

   Wir hatten bereits gesehen, dass sich die Kontinuitätsgleichung als $\partial_a J^a = 0$ schreiben lässt, wobei der 4er-Strom J^a die Komponenten $J^a = \mu_0 \rho_0 u^a = (\mu_0 \rho c, \mu_0 \vec{J})$ hat.

   Die folgende Aufgabe ist im wesentlichen eine Wiederholung von Dingen die wir bereits in der Vorlesung gemacht und besprochen haben. Sinn und Zweck der Übung ist, dass Ihr diese Rechnungen selber nachvollzieht, unter anderem um Euch davon zu überzeugen, um wieviel einfacher und übersichtlicher die kovarianten Rechnungen sind.

   Wir führen das 4er-Potential $A_a = (-\phi/c, \vec{A})$ ein und definieren den elektromagnetischen Feldstärketensor $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$.

   (a) Zeige dass sich die Eichtransformationen in vereinheitlichter Form als

   $$\phi \to \phi - \partial_t \Psi \quad , \quad \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi \quad \Leftrightarrow \quad A_a \to A_a + \partial_a \Psi \tag{1}$$

   schreiben lassen. [je 1-Zeilen-"Rechnung"]

   (b) Zeige dass F_{ab} eichinvariant ist, d.h. invariant unter Eichtransformationen $A_a \to A_a + \partial_a \Psi$. [1-Zeilen-Rechnung]

   (c) Drücke die Komponenten F_{0k} und F_{ik} von F_{ab} unter Verwendung von

   $$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \tag{2}$$

   durch die Komponenten E_i und B_i aus [je 1-2 Zeilen (abhänging von Schriftgrösse ...)] und bestimme daraus die Komponenten von F^{ab}.

   (d) Zeige dass die 4 Gleichungen

   $$\partial_a F^{ab} = -J^b \tag{3}$$

   (mit F^{ab} ausgedrückt durch E_i und B_i) die inhomogenen Maxwell-Gleichungen sind.

   (e) Zeige dass (3) sich als

   $$\Box A_a - \partial_a(\partial_b A^b) = -J_a \tag{4}$$

   schreiben lässt. [1-Zeilen Rechung]

   (f) Zeige dass aus (3) die Stromerhaltung $\partial_a J^a = 0$ folgt. [1-Zeilen Rechnung]