KFT Übungen 01b

1. Geometrie: Analytische Minkowski-Geometrie

   Sei v ein zeitartiger Vektor v, d.h. $v^2 \equiv v.v = \eta_{ab} v^a v^b < 0$.

   (a) Zeige: wenn w zu v η-orthogonal ist, $v.w = \eta_{ab} v^a w^b = 0$, dann ist w raumartig, d.h.

   $$v^2 < 0 \quad , \quad v.w = 0 \quad \Rightarrow \quad w^2 > 0 \tag{1}$$

   (b) Zeige dass sich v als Summe von 2 lichtartigen Vektoren schreiben lässt (Einstein-Synchronisation), d.h.

   $$v^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, w_1, w_2 \quad \text{mit} \quad (w_1)^2 = (w_2)^2 = 0 : \quad v = w_1 + w_2 \tag{2}$$

   Hinweis: Die obigen Behauptungen sind Lorentz-invariant. Wenn man sie daher in einem (geeignet gewählten) Inertialsystem zeigt, gelten sie dann automatisch in jedem Inertialsystem. Für (a) und (b) ist ein geeignetes Inertialsystem zum Beispiel jenes in dem der Vektor v die besonders einfache Form $v = (v^0, 0, 0, 0)$ annimmt.

   Aufgabe (b) zeigt, dass im Allgemeinen die Summe von zwei lichtartigen Vektoren nicht lichtartig ist (der Lichtkegel ist ein Kegel und kein Vektorraum …). Wie sieht es mit der Summe zweier raumartiger oder zeitartiger Vektoren aus?

   (c) Ist die Summe $u^a + v^a$ von zwei raumartigen (zeitartigen) 4er-Vektoren u^a und v^a (mit $u^a + v^a \neq (0,0,0,0)$) immer raumartig (zeitartig)?