

## KFT FS20: KONTROLLFRAGEN

- Hier ist eine bunt gemischte Liste von Kontroll-Fragen und/oder Kontroll-Aufgaben. Das Einzige was diese Fragen/Aufgaben gemeinsam haben ist, dass man sie bei gutem Verständnis des Vorlesungsstoffs problemlos und sofort beantworten können müsste. Diese Fragen dienen daher primär der Selbstkontrolle.
- In den Übungsaufgaben geht es primär darum, unfallfrei den neuen Formalismus anwenden und (wie der Name schon sagt) üben zu können, und dadurch z.B. Gleichungen korrekt und möglichst einfach umformen zu können.
- Im Gegensatz dazu geht es bei diesen Kontrollfragen primär (aber nicht ausschliesslich) z.B. um Begriffliches (wichtig für unfallfreie Kommunikation) und Konzeptionelles, insbesondere um das Verständnis der Verbindung zwischen Formalismus und Physik.

### INHALTSVERZEICHNIS

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Minkowski Raum und Lorentz-Tensoren</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Relativistische Mechanik</b>	<b>4</b>
3.1	Relativistische Kinematik und Dynamik . . . . .	4
3.2	Wirkungsprinzip und Noether-Theorem . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Maxwell Theorie</b>	<b>6</b>
4.1	Grundlagen . . . . .	6
4.2	Potentiale und Inhomogene Gleichungen . . . . .	7
4.3	Homogene Gleichungen . . . . .	8
4.4	Lorentz-Transformationen . . . . .	8
4.5	Geladenes Teilchen im Magnetfeld . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Wirkung und Variationsprinzip für Felder</b>	<b>10</b>
5.1	Allgemeines . . . . .	10
5.2	Skalarfelder . . . . .	10
5.3	Maxwell-Theorie . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Symmetrien und Lagrangesche Feldtheorien</b>	<b>11</b>
6.1	Noether Theorem für Felder . . . . .	11
6.2	Eichinvarianz und Minimale Kopplung . . . . .	11
6.3	Translations-Invarianz und der Energie-Impuls Tensor . . . . .	11

# 1 GRUNDLAGEN

Dieser Teil ist nicht direkt prüfungsrelevant, in dem Sinn dass die Fragen hier nicht direkt als Fragen in einer Prüfung auftauchen werden. Das heisst aber nicht, dass sie nicht relevant sind, im Gegenteil! Hier geht es um grundlegende Begriffe die (aus der Mechanik I) bekannt sein sollten, und die jeder Physiker (und jeder Physikstudent im 6. Semester) ohne zu zögern beantworten können sollte!

1. Was ist ein Inertialsystem?
2. Was ist die Aussage des Relativitätsprinzips?
3. In welchen Annahmen unterscheiden sich das Galileische und das Einsteinsche (“speziell relativistische”) Relativitätsprinzip?
4. Lorentz-Kontraktion:

Was hat die Lorentz-Kontraktion mit der Konvention für einen Begriff der Gleichzeitigkeit zu tun?

5. Zeitdilatation:

Seien  $(t, x^i)$  die Koordinaten eines Inertialsystems, und  $(\bar{t}, \bar{x}^i)$  die Koordinaten eines sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit dazu bewegendes Inertialsystems. Aus den Lorentz-Transformationen folgt etwas, das in Worten üblicherweise leider oft so formuliert wird wie “[...] Aha, also ist  $\Delta\bar{t} > \Delta t$ , d.h. bewegte Uhren laufen langsamer als ruhende Uhren”.

- (a) Leite die dieser Aussage zugrunde liegende Beziehung zwischen  $\Delta t$  und  $\Delta\bar{t}$  aus den Lorentz-Transformationen für einen boost (o.b.d.A. in der  $x$ -Richtung) her.
  - (b) Was ist an dem folgenden (leider in dieser oder ähnlicher Form weit verbreiteten) Argument falsch:  
“Aber vom bewegten Bezugssystem aus gesehen hat man dann ja logischerweise  $\Delta t > \Delta\bar{t}$ , also Widerspruch, also ist Einstein ein Trottel, und ich bin ein Genie dass ich das entdeckt habe [und die gesamte moderne Physik ist Teil einer jüdischen Weltverschwörung].”
  - (c) Was ist also eine bessere, präzisere Formulierung der Aussage der Zeitdilatation die diesem Fehlschluss / Hirn-Kurzschluss die Grundlage entzieht?
6. Wie ist physikalisch die Eigenzeit eines Beobachters definiert? (siehe Kapitel 3 für die mathematische Definition) Welche Rolle spielt die Eigenzeit in der obigen Diskussion der Zeitdilatation?
  7. Erkläre die “Zwillings-Tatsache” in einer Form in der es offensichtlich ist, dass daran nichts paradox ist, und die zeigt dass ein “Zwillings-Paradoxon” nur dann entsteht, wenn man absichtlich (oder aus Unfähigkeit sich klar auszudrücken) die Leute verwirrt.

## 2 MINKOWSKI RAUM UND LORENTZ-TENSOREN

1. Wie sind Lorentz- und Poincaré-Transformationen physikalisch / algebraisch / geometrisch definiert?  
(viele richtige, aber natürlich noch viel mehr falsche, Antworten möglich).
2. Erkläre die Begriffe Minkowski-Raum und Minkowski-Metrik.
3. Was sind zeitartige, raumartige, lichtartige Abstände und was versteht man unter dem Lichtkegel eines Ereignisses?
4. Wie sind Lorentz-Vektoren und Lorentz-Kovektoren definiert?
5. Ist die Aussage "der Lorentz-Vektor  $v^a$  ist raumartig" Lorentz-invariant? Warum?
6. Ist die Summe zweier raumartiger (lichtartiger) Vektoren wieder raumartig (lichtartig)?
7. Sei  $\eta_{ab}$  die Minkowski-Metrik. Warum schreibt man die Komponenten der inversen Metrik als  $\eta^{ab}$ ? Was ist  $\eta^{ab}\eta_{bc}$ ?  $\eta^{ab}\eta_{cb}$ ?  $\eta_{ab}\eta^{cb}$ ?  $\eta^{ab}\eta_{ab}$ ?
8. Seien  $v^a$  und  $w^a$  Lorentz-Vektoren, und  $v_a = \eta_{ab}v^b$ ,  $w_a = \eta_{ab}w^b$ . Vergewissere Dich, dass Dir sonnenklar ist dass

$$v_a w^a = w_b v^b = v^c w_c = \eta_{ab} v^a w^b = \eta^{cd} v_c w_d \quad (2.1)$$

alles genau das Gleiche ist.

### 9. Lorentz-Skalare

- (a) Wie lassen sich (ohne Hilfe der Minkowski-Metrik  $\eta_{ab}$  und ihrer inversen) aus Vektoren  $v^a$  und  $w^a$ , und einem Kovektor  $b_a$ , und einem  $(1,2)$ -Tensor  $Q^a{}_{bc}$  Lorentz-Skalare bilden? (ein paar Beispiele genügen - es gibt viele Möglichkeiten ...)
- (b) Und wenn man zusätzlich noch  $\eta_{ab}$  und  $\eta^{ab}$  verwenden darf?  
(ein paar Beispiele genügen - es gibt jetzt noch viel mehr Möglichkeiten ...)

### 10. Lorentz-Invariante Differential-Operatoren

- (a) Zeige das die Divergenz  $\partial_a V^a(x)$  eines Lorentz-Vektorfelds ein Lorentz-Skalar ist, und schreibe diese Gleichung in der Form einer gewöhnlichen (nicht notwendigerweise Lorentz-invarianten) Kontinuitätsgleichung.
- (b) Zeige dass  $\square = \eta^{ab}\partial_a\partial_b$  der Wellen-Operator für Wellen mit Lichtgeschwindigkeit ist, und dass  $\square$  Lorentz-invariant ist.
- (c) Sei  $A_a$  ein Kovektorfeld. Ist die Gleichung

$$\square A_a - \partial_a(\partial_b A^b) = 0 \quad (2.2)$$

Lorentz-invariant? Wie muss sich  $J_a$  transformieren damit die Gleichung

$$\square A_a - \partial_a(\partial_b A^b) = J_a \quad (2.3)$$

Lorentz-invariant ist?

### 3 RELATIVISTISCHE MECHANIK

#### 3.1 RELATIVISTISCHE KINEMATIK UND DYNAMIK

1. Vergewissere Dich, dass Du mit den folgenden Grundbegriffen und Grundbausteinen der relativistischen Mechanik massiver Teilchen vertraut bist:
  - die Eigenzeit  $\tau$ , definiert durch  $ds^2 = -c^2 d\tau^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b$ , das Lorentz-invariante Mass für Abstände entlang einer zeitartigen Weltline.
  - die durch  $\tau$  parametrisierte zeitartige Weltline  $x^b = x^b(\tau)$ ,
  - die (4er-)Geschwindigkeit  $u^b = dx^b/d\tau$ ,
  - der (4er-)Impuls  $p^b = mu^b$  (mit  $m$  die Ruhemasse des Teilchens),
  - die (4er-)Beschleunigung  $a^b = du^b/d\tau$ .
  - die Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen,  $dp^b/d\tau = 0 \Leftrightarrow a^b = d^2x^b/d\tau^2 = 0$ .
2. Vergewissere Dich, dass es offensichtlich ist (1-Zeilen Beweise) dass Folgendes gilt:
  - (a)  $u^b$  und  $a^b$  sind Lorentz-Vektoren
  - (b)  $u_b u^b = -c^2$  und  $u_b a^b = 0$
  - (c) Obwohl  $a^b$  nicht invariant ist unter Lorentz-Transformationen (sondern sich eben als Lorentz-Vektor transformiert), ist die Bewegungsgleichung  $a^b = 0$  Lorentz-invariant.
  - (d)  $mdu^b/d\tau = K^b \Rightarrow K^b u_b = 0$  (Minkowski-Kraft muss orthogonal zu  $u^b$  sein).
3. Was ist die Bedeutung / physikalische Interpretation der 0-Komponente  $p^0$  des Impulses?
4. Was ist die *Massenschale* eines massiven Teilchens? Was ist der Zusammenhang zwischen der Minkowski-Norm des 4er-Impulses und der Ruheenergie eines massiven Teilchens? Wie lautet die Massenschalen-Bedingung für ein masseloses Teilchen?

#### 3.2 WIRKUNGSPRINZIP UND NOETHER-THEOREM

1. Vergewissere Dich, dass Du mit den folgenden Grundbegriffen und Grundbausteinen der Analytischen Mechanik vertraut bist:
  - Variationen
  - Lagrangefunktion und Euler-Lagrange Gleichungen
  - Wirkungsprinzip / Hamiltonsches Prinzip
2. Die Wirkung für ein freies Teilchen ist  $S[x] = -mc^2 \int d\tau(x)$ .
  - (a) Erkläre, was mit  $d\tau(x)$  gemeint ist, und was die wichtigsten Eigenschaften dieser Wirkung sind.
  - (b) Zeige dass die Extremalbedingung für diese Wirkung die Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen ist. (verschiedene Argumente möglich)

- (c) Wird die Wirkung für ein freies Teilchen minimal? maximal? etwas anderes?
- (d) Warum wählt man den Vorfaktor  $(-mc^2)$ ?

### 3. Noether Theorem

Sei  $L = L(x^a(\lambda), x'^a(\lambda); \lambda)$  eine Lagrangefunktion und  $\delta x^a(\lambda)$  eine Variation.

- (a) Vergewissere Dich, dass Du in 2 Zeilen die *Variational Master Equation*

$$\delta L = \mathcal{E}_a \delta x^a + \frac{d}{d\lambda} (p_a \delta x^a) \quad (3.1)$$

herleiten kannst, wobei  $\mathcal{E}_a$  die Euler-Lagrange Gleichungen sind, und  $p_a = \partial L / \partial x'^a$ .

- (b) Vergewissere Dich, dass Du dann daraus in einer Zeile das Noether-Theorem in der folgenden Form herleiten kannst: "Sei  $\Delta x^a$  eine Symmetrie, d.h. eine Variation die die Lagrangefunktion invariant lässt,  $\Delta L = 0$ ; dann ist  $Q = p_a \Delta x^a$  eine Erhaltungsgrösse." (1-Zeilen Argument)
- (c) Um zu zeigen, dass  $\Delta x^a$  eine Symmetrie ist darf (oder muss) man nicht die Euler-Lagrange Gleichungen verwenden. Muss man sie verwenden um zu zeigen dass  $Q$  erhalten ist?

### 4. Poincaré-Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Schreibe die Wirkung für ein freies Teilchen in der Form  $S[x] = \int d\lambda L_\lambda$ , wo  $\lambda = \lambda(\tau)$ .

- (a) Was ist  $L_\lambda$  explizit als Funktion von  $x^a(\lambda)$  und seiner Ableitungen?
- (b) Zeige explizit dass  $L_\lambda$  unter infinitesimalen Poincaré-Transformationen (Translationen und Lorentz-Transformationen) invariant ist, und bestimme die entsprechenden Erhaltungsgrößen.
- (c) Was ist die physikalische Interpretation dieser Erhaltungsgrößen?
- (d) Wie transformieren sie sich unter Lorentz-Transformationen? (Sind es Lorentz-Tensoren?)
- (e) Zeige dass aus Erhaltung der räumlichen Komponenten des Impulses in jedem Inertialsystem (äquivalent: dass aus Erhaltung der räumlichen Komponenten des Impulses und Lorentz-Invarianz) die Energie-Erhaltung (Erhaltung von  $p^0$ ) folgt.
- (f) In der Newtonschen Mechanik gilt dies nicht! Denke in diesem Zusammenhang über den Unterschied zwischen einer Newtonschen und einer relativistischen Bombe oder Granate nach (zitiert mehr oder weniger nach Nolting: Spezielle Relativitätstheorie):

Man denke an eine explodierende Granate. Die Impulse der Bruchstücke addieren sich vektoriell zu *der* Konstanten, die der Impuls vor der Explosion hatte, wohingegen sich die kinetische Energie, wie man weiss, *verheerend* geändert hat. Die relativistische Energie kann sich dagegen *nicht* geändert haben. Das ist aber [...] nur dann möglich, wenn die Änderung der Ruhe-Energie  $mc^2$  bei diesem Prozess die Änderung der kinetischen Energie kompensiert.

Dies ist eine der Überlegungen die zu Einsteins Äquivalenz von Masse und Energie führt (und ein guter Moment, dieses Kapitel zu einem Abschluss zu bringen!),

$$\Delta E = (\Delta m)c^2 \quad (3.2)$$

## 4 MAXWELL THEORIE

### 4.1 GRUNDLAGEN

1. Einfache Überlegungen zeigen, dass sich elektrische und magnetische Felder unter Lorentz boosts ineinander transformieren müssen, bzw. dass die Zerlegung eines elektromagnetischen Feldes in ein elektrisches Feld und ein magnetisches Feld vom Inertialsystem abhängt: Vergewissere Dich, dass Du das folgende, im Skript erwähnte, elementare Beispiel verstehst: das elektromagnetische Feld einer Ladung mit konstanter Geschwindigkeit ist nur im Ruhssystem der Ladung rein elektrisch (und besonders einfach); in jedem anderem Inertialsystem aber hat es eine nicht verschwindende magnetische Komponente. D.h. durch die Transformation vom Ruhssystem auf ein anderes Inertialsystem wird aus dem elektrischen Feld im Ruhssystem ein elektrisches + magnetisches Feld im neuen Inertialsystem erzeugt.

**Bemerkung:** Diese Überlegung legt auch die intelligente Art nahe, das Maxwell-Feld einer (gleichförmig) bewegten Ladung zu finden, wenn man einmal weiss wie sich  $\vec{E}$  unter Lorentz-Transformationen transformiert:

- Man verwendet die bekannte rein elektrische Lösung im Ruhssystem der Ladung (Elektrostatik,  $\vec{E} \sim \vec{x}/r^3$ ).
- Man macht die Lorentz-Transformation auf ein anderes Inertialsystem (lineare Algebra).

Problem gelöst ... (s. Kapitel 6.3 für eine ausführliche Diskussion).

2. Stelle ähnliche Überlegungen anhand der Lorentzkraft  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$  an, die auf ein Teilchen mit Ladung  $q$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$  wirkt:
  - Im ersten Inertialsystem sei ein rein magnetisches Feld  $\vec{B}$  vorhanden, das auf ein Teilchen mit (Momentan-)Geschwindigkeit  $\vec{v}$  die Kraft  $q\vec{v} \times \vec{B}$  ausübt. Was ist die Ursache dieser Kraft im (momentanen) Ruhssystem der Ladung?
  - Im Ruhssystem der Ladung gebe es ein rein magnetisches Feld (das also keine Kraft auf die Ladung ausübt). In jedem anderen Inertialsystem (mit  $\vec{v} \neq 0$ ) darf dann auf das Teilchen auch keine Kraft wirken (nach Definition von Inertialsystemen!). Wie ist das mit der Formel für die Lorentz-Kraft kompatibel?

**Bemerkung:** Diese Überlegungen zeigen schon, dass es ~~ziemlich idiotisch~~ gelegentlich vielleicht etwas unpraktisch ist, mit einer Formulierung der Maxwell-Gleichungen zu arbeiten, in der dauernd zwischen elektrischen und magnetischen Feldern unterschieden wird. Besser wäre vielleicht die Beschreibung durch *ein* vereinheitlichtes elektromagnetisches Feld, welches sich in schöner Weise unter Lorentz-Transformationen in sich selbst transformiert, also ein Lorentz-Tensor ist. Genau das ist unser Ziel!

3. Zeige dass sich die Kontinuitätsgleichung  $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  für die Ladungsdichte  $\rho$  und die Stromdichte  $\vec{J}$  in Lorentz-kovarianter Form suggestiv als  $\partial_a J^a = 0$  schreiben lässt, und dass die dadurch definierten Komponenten  $J^a$  sich tatsächlich wie ein Lorentz 4er-Vektor transformieren.

## 4.2 POTENTIALE UND INHOMOGENE GLEICHUNGEN

1. Erkläre warum die Eichtransformationen des skalaren Potentials  $\phi$  und des Vektorpotentials  $\vec{A}$  bereits nahelegen, diese in einem Lorentz-Kovektor  $A_a$  zu vereinen. Warum eher ein Kovektor als ein Vektor?
2. Sei  $A_a = (-\phi/c, \vec{A})$  und  $J^a = \mu_0(c\rho, \vec{J})$ .

- Zeige dass sich die inhomogenen Gleichungen für die Potentiale einfach als

$$\square A_a - \partial_a(\partial_b A^b) = -J_a \quad (4.1)$$

schreiben lassen.

- Diskutiere die Lorentz-Invarianz dieser Gleichung.
  - Zeige dass diese Gleichung eichinvariant ist, d.h. invariant unter  $A_a \rightarrow A_a + \partial_a f$ .
  - Zeige dass aus dieser Gleichung die Stromerhaltung  $\partial_a J^a = 0$  folgt.
3. Diskutiere die Lorenz-Eichbedingung  $\partial_a A^a = 0$ :
    - Ist  $\partial_a A^a$  eichinvariant?
    - Ist  $\partial_a A^a$  Lorentz-invariant?
    - Warum ist  $\partial_a A^a = 0$  eine nützliche und attraktive Eichbedingung?
  4. Sei  $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$  der Feldstärke-Tensor.

- Wieviele unabhängige Komponenten hat  $F_{ab}$ ?
- Wie transformiert sich  $F_{ab}$  unter Eichtransformationen?
- Wie transformiert sich  $F_{ab}$  unter Lorentz-Transformationen?
- In einem Inertialsystem mit Koordinaten  $(x^0, x^i)$ : welche Komponenten von  $F_{ab}$  beschreiben das elektrische Feld und welche das magnetische?
- Was ist der genaue Zusammenhang zwischen  $F_{ab}$  und

$$E_i = -\partial_i \phi - \partial_t A_i \quad , \quad B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \quad (4.2)$$

(Summation über die Indizes  $(j, k)$ ).

- Wie hängen die Komponenten von  $F^{ab}$  mit denen von  $F_{ab}$  zusammen? zB: Mit  $F_{01} = -E_1/c, F_{12} = B_3$ , was ist  $F^{01}$ , oder  $F^{10}$ , oder  $F^{12}$  oder ...?
5. Schreibe (4.1) als eine Lorentz-invariante Differentialgleichung für  $F_{ab}$ .
  6. Vergewissere Dich, dass Du verstehst, dass der Beweis

$$\partial_a F^{ab} = -J^b \quad \Rightarrow \quad \partial_b J^b = 0 \quad (4.3)$$

wirklich eine triviale 1-Zeilen "Rechnung" ist, und vergleiche diese "Rechnung" mit der üblichen Herleitung der Kontinuitätsgleichung aus den Maxwell-Gleichungen.

### 4.3 HOMOGENE GLEICHUNGEN

1. Vergewissere Dich, dass Du die folgenden Aussagen (“Bianchi Identitäten”) als offensichtliche Konsequenz von  $\partial_a \partial_b = \partial_b \partial_a$  (und der Definition der totalen Anti-Symmetrisierung) verstehst:

$$\begin{aligned} F_a = \partial_a G &\Rightarrow \partial_{[a} F_{b]} = 0 \Leftrightarrow \partial_a F_b - \partial_b F_a = 0 \\ F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a &\Rightarrow \partial_{[a} F_{bc]} = 0 \Leftrightarrow \partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

2. Insbesondere sind also  $\partial_{[a} F_{bc]} = 0$  eichinvariante Gleichungen, die identisch erfüllt sind wenn  $F_{ab}$  die Form  $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$  hat. Erkläre (ohne Rechnung) warum diese Gleichungen daher zu den homogenen Maxwell-Gleichungen in der traditionellen Formulierung,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0$ , äquivalent sein müssen.
3. Überzeuge Dich davon, dass ein total anti-symmetrischer  $(0, p)$ -Tensor in 4 Dimensionen

$$\binom{4}{p} = \frac{4!}{p!(4-p)!} \quad (4.5)$$

unabhängige Komponenten hat. Also zB:

$$\begin{aligned} p = 1 & \quad 4 \text{ Komponenten} \quad (\text{Beispiel: } A_a) \\ p = 2 & \quad 6 \text{ Komponenten} \quad (\text{Beispiel: } F_{ab}) \\ p = 3 & \quad 4 \text{ Komponenten} \quad (\text{Beispiel: } \partial_{[a} F_{bc]}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Schliesse insbesondere daraus dass  $\partial_{[a} F_{bc]} = 0$  vier unabhängige Gleichungen sind.

4. Zeige in 2 Zeilen, dass aus den quellenfreien ( $J^a = 0$ ) Maxwell-Gleichungen die Wellengleichung für die Feldstärken  $F_{ab}$  folgt,

$$\partial_a F^{ab} = 0 \quad , \quad \partial_{[a} F_{bc]} = 0 \quad \Rightarrow \quad \square F_{ab} = 0 \quad . \quad (4.7)$$

Wie lautet die entsprechende Gleichung, wenn  $J^a \neq 0$ ? Vergleiche mit der entsprechenden Rechnung in der traditionellen Formulierung.

5. Sei

$$\tilde{F}^{ab} = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} F_{cd} \quad (4.8)$$

der duale Feldstärketensor. Vergewissere Dich, dass Dir sonnenklar ist dass

$$\partial_a \tilde{F}^{ab} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0 \quad . \quad (4.9)$$

6. Diskutiere den Zusammenhang zwischen der Abbildung  $F^{ab} \rightarrow \tilde{F}^{ab}$  und der elektromagnetischen Dualität  $\vec{E}/c \rightarrow -\vec{B}, \vec{B} \rightarrow \vec{E}/c$  der quellenfreien Maxwell-Gleichungen.

### 4.4 LORENTZ-TRANSFORMATIONEN

1. Diskutiere die Invarianten (eichinvariante Lorentz-Skalare)  $F_{ab} F^{ab}$  und  $F_{ab} \tilde{F}^{ab}$ .



2. Ist es möglich, mit Hilfe einer Lorentz-Transformation ein reines  $\vec{E}$ -Feld in ein reines  $\vec{B}$ -Feld zu überführen? Begründung?
3. Gib Beispiele von Invarianten die mit Hilfe der Ableitungen von  $F_{ab}$  gebildet werden können.
4. Beschreibe die Strategie, mittels Lorentz-Transformationen das Maxwell-Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung aus dem einer ruhenden Ladung herzuleiten.
5. Überlege Dir, dass in analoger Weise das Maxwell-Feld eines gleichförmigen Stroms aus dem eines geladenen Drahts hergeleitet werden kann.
6. Insbesondere bedeutet dies, dass das magnetische Feld welches durch einen Strom erzeugt wird als ein "relativistischer Effekt" betrachtet werden kann. Obwohl die Geschwindigkeiten der Elektronen sehr langsam sind, von der Grössenordnung Millimeter / Sekunde, ist dies ein makroskopisch gut beobachtbarer und alltäglicher Effekt (elektrischer Motor!). Woran liegt das?

#### 4.5 GELADENES TEILCHEN IM MAGNETFELD

1. Minkowski-Kraft (allgemein):

Die Lorentz-kovariante Form der Bewegungsgleichung für ein Teilchen auf das eine äussere Kraft wirkt lautet  $dp^a/d\tau = K^a$ .

- (a) Rufe Dir in Erinnerung, warum daraus die Bedingung  $K^a u_a = 0$  folgt.
- (b) Zeige, dass die zeitliche Komponente der Bewegungsgleichung aus den räumlichen Komponenten und der Bedingung  $K^a u_a = 0$  folgt,

$$K^a u_a = 0 \quad , \quad \frac{d}{d\tau} p^i = K^i \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} p^0 = K^0 \quad . \quad (4.10)$$

2. Lorentz-Kraft:

- (a) Wie lautet die Lorentz-kovariante Form der Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen im Maxwell-Feld?
- (b) Zeige, dass die Lorentz-Kraft die Bedingung  $K^a u_a = 0$  erfüllt.
- (c) Was ist die physikalische Interpretation der Zeitkomponente der Bewegungsgleichung?

3. Wirkungsprinzip

- (a) Was ist die Wirkung für ein geladenes Teilchen im Maxwell-Feld?
- (b) Die Lagrangefunktion hat die Form  $L = L_0 + L_I$ , wobei  $L_0$  die Lagrangefunktion für ein freies Teilchen ist und  $L_I$  die Kopplung des geladenen Teilchens an das Maxwell-Feld beschreibt. Diskutiere die Lorentz- und Eichinvarianz des Kopplungsterms  $L_I$ .
- (c) Vergewissere Dich dass Du unfallfrei die Lorentz-Kraft aus der Variation des Kopplungsterms  $L_I$  herleiten kannst.
- (d) Bestimme den Zusammenhang zwischen dem kanonischen Impuls  $P^a = \partial L / \partial \dot{x}^a$  und dem Impuls  $p^a$  eines freien Teilchens. Was ist die Interpretation von  $P^0$ ?

## 5 WIRKUNG UND VARIATIONSPRINZIP FÜR FELDER

### 5.1 ALLGEMEINES

1. Sei  $L = L(\Phi^A, \partial_a \Phi^A; x^a)$ . Vergewissere Dich, dass Du die 2-Zeilen Herleitung der *Variational Master Equation*

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial \Phi^A(x)} \delta \Phi^A(x) + \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \Phi^A(x))} \delta (\partial_a \Phi^A(x)) \\ &= \left( \frac{\partial L}{\partial \Phi^A(x)} - \frac{d}{dx^a} \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \Phi^A(x))} \right) \delta \Phi^A(x) + \frac{d}{dx^a} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \Phi^A(x))} \delta \Phi^A(x) \right)\end{aligned}\quad (5.1)$$

vollständig verstehst. Wie ist die totale Ableitung  $d/dx^a$  definiert? In welchem Sinn ist  $d/dx^a$  eine partielle Ableitung?

2. Sei  $S[\Phi] = \int d^D x L$  die zugehörige Wirkung. Leite aus (5.1) die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi^A(x)} - \frac{d}{dx^a} \frac{\partial L}{\partial (\partial_a \Phi^A(x))} = 0 \quad (5.2)$$

als die Extremalitätsbedingungen für die Wirkung her (1-Zeilen Argument).

3. Wie ändern sich die Euler-Lagrange Gleichungen, wenn man die Lagrangefunktion um eine totale Divergenz ändert,

$$L'(\Phi^A, \partial_a \Phi^A; x) = L(\Phi^A, \partial_a \Phi^A; x) + \frac{d}{dx^a} W^a(\Phi^A; x) . \quad (5.3)$$

Beweis?

### 5.2 SKALARFELDER

1. Formuliere ein Wirkungsprinzip für
  - (a) die Laplace-Gleichung  $\Delta \Phi(\vec{x}) = 0$
  - (b) die Poisson-Gleichung  $\Delta \Phi(\vec{x}) = \mu(\vec{x})$
2. Diskutiere allgemein die Konstruktion von Poincaré-invarianten Wirkungsprinzipien für Skalarfelder im Minkowski-Raum, und gib einige Beispiele an.
3. Diskutiere insbesondere die Klein-Gordon Gleichung und den Zusammenhang mit der Massenschalen-Bedingung für ein massives relativistisches Teilchen.

### 5.3 MAXWELL-THEORIE

1. Sei  $A_a$  ein Kovektorfeld. Diskutiere allgemein die Konstruktion eines Poincaré-invarianten Wirkungsprinzips für  $A_a$ . Betrachte insbesondere die Lagrangefunktion

$$L = (\partial_a A_b) (\alpha \partial^a A^b + \beta \partial^b A^a + \gamma \eta^{ab} (\partial_c A^c)) \quad (5.4)$$

Ist  $L$  Lorentz-invariant? Eichinvariant?

- Diskutiere die Konstruktion eines Poincaré- und eich-invarianten Wirkungsprinzips für das Maxwell Eichfeld  $A_a$ , und erkläre wie und in welchem Sinn man eindeutig auf die Maxwell-Wirkung mit  $L \sim F_{ab}F^{ab}$  kommt.
- Betrachte die Wirkung für Maxwell-Theorie gekoppelt an einen externen (nicht-dynamischen) Strom  $J^a$ ,

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} + A_a J^a \right) . \quad (5.5)$$

Vergewissere Dich, dass Du durch Variation von  $A_a$  daraus in wenigen Zeilen die Maxwell-Gleichungen herleiten kannst.

- Diskutiere den Zusammenhang zwischen Eichinvarianz der obigen Wirkung und Stromerhaltung.
- Reflektiere jetzt rückblickend über die Maxwell-Gleichungen: findest Du es hilfreich zu wissen, dass die Form der Maxwell-Gleichungen im Wesentlichen eindeutig durch die postulierten Symmetrien (Eich- und Lorentz-Transformationen) bestimmt ist?

## 6 SYMMETRIEN UND LAGRANGESCHE FELDTHEORIEN

### 6.1 NOETHER THEOREM FÜR FELDER

- Vergewissere ich, dass Du aus der *Variational Master Equation* (5.1) in einer Zeile das Noether Theorem in folgender Form herleiten kannst: Sei  $\delta_s \Phi^A$  eine Quasi-Symmetrie, d.h. eine Variation, die die Lagrangefunktion bis auf eine totale Ableitung invariant lässt; dann gibt es einen zugehörigen (für Lösungen zu den Bewegungsgleichungen) erhaltenen Strom.
- Wie und unter welchen Bedingungen erhält man aus einem erhaltenen Strom eine erhaltene Ladung? (Verwende das kovariante Argument  $0 = \int d^4x \partial_a J^a = \dots$ ).
- Sei  $\delta_s \Phi^A$  eine Quasi-Symmetrie der Lagrangefunktion  $L$ . Zeige dass  $\delta_s \Phi^A$  dann auch eine Quasi-Symmetrie der Lagrangefunktion  $L' = L + (dW^a/dx^a)$  (5.3) ist. (1-Zeilen Beweis)

### 6.2 EICHINVARIANZ UND MINIMALE KOPPLUNG

- Erkläre die Begriffe “lokale  $U(1)$ -Transformation” und “kovariante Ableitung”.
- Erkläre, welchem Zweck die Einführung eines Eichfelds dienen kann.
- Beschreibe das Rezept der “Minimalen Kopplung”.

### 6.3 TRANSLATIONS-INVARIANZ UND DER ENERGIE-IMPULS TENSOR

- Wie definiert man die Variation eines Felds unter einer Raum-Zeit Translation?
- In welchem Sinn ist eine Lagrangefunktion die nicht explizit von den Koordinaten abhängt Translations-invariant?

3. Erkläre den Zusammenhang zwischen Translationsinvarianz der Lagrangefunktion und dem Noether Energie-Impuls Tensor.
4. Beschreibe die physikalische Interpretation der Komponenten  $\Theta_{ab}$  des Noether Energie-Impuls Tensors.