Mechanik II Lösungen 01

Zwangsbedingungen, Zwangskräfte, Lagrange Gleichungen 1. Art

1. Bewegung im Schwerefeld entlang einer beliebigen Kurve

   (a) $G(x,y) = y - f(x) \stackrel{!}{=} 0$.

   (b)
$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \partial_x G(x,y) = -\lambda f'(x) \\ m\ddot{y} &= -mg + \lambda \partial_y G(x,y) = -mg + \lambda \end{aligned} \tag{1}$$

   (c)
$$G = y - f(x) \quad \Rightarrow \quad \ddot{G} = \ddot{y} - f''(x)\dot{x}^2 - f'(x)\ddot{x} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall t \tag{2}$$

   Einsetzen von $\ddot{x}$ und $\ddot{y}$ aus (1) führt zu

$$0 = -g + (\lambda/m)(1 + f'(x)^2) - f''(x)\dot{x}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = m\frac{g + f''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} \tag{3}$$

   Daher hat die Zwangskraft $\vec{Z} = \lambda \vec{\nabla} G$ die Komponenten

$$Z^x = -\lambda f'(x) = -mf'(x)\frac{g + f''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} \quad , \quad Z^y = \lambda = m\frac{g + f''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} \tag{4}$$

   (d) Einsetzen von λ in (1) führt auf

$$\ddot{x} = -f'(x)\frac{g + f''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} \quad , \quad \ddot{y} = -g + \frac{g + f''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} \tag{5}$$

   (e) Unter Verwendung der Gleichung für $\ddot{x}$ folgt aus (2)

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{G} + f'(x)\ddot{x} + f''(x)\dot{x}^2 \\ &= \ddot{G} - f'(x)^2\frac{g + f''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} + f''(x)\dot{x}^2 \\ &= \ddot{G} - (1 + f'(x)^2)\frac{g + f''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} + \frac{g + f''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} + f''(x)\dot{x}^2 \\ &= \ddot{G} - g + \frac{g + f''(x)\dot{x}^2}{1 + f'(x)^2} \end{aligned} \tag{6}$$

   und dies stimmt bis auf den Term $\ddot{G}$ mit der Gleichung für $\ddot{y}$ überein.

2. Spezialfall: Bewegung auf einer schiefen Ebene

   (a) Für $f(x) = kx, f'(x) = k, f''(x) = 0$ lautet die Gleichung für $x(t)$

$$\ddot{x} = -gk/(1 + k^2) \ . \tag{7}$$

Mit $k = \tan\alpha$ wird daraus

$$\ddot{x} = -g \sin\alpha \cos\alpha \quad , \tag{8}$$

mit allgemeiner Lösung

$$x(t) = -g \sin\alpha \cos\alpha \; t^2/2 + v_0 t + x_0 \tag{9}$$

(b) Aus $y = kx$ folgt

$$y(t) = kx(t) = -g \sin^2\alpha \; t^2/2 + \tan\alpha \; v_0 t + \tan\alpha \; x_0 \tag{10}$$

(c) Dieses Resultat stimmt mit Gleichung (8.19) bis auf eine irrelevante Umbenennung der Integrationskonstanten (und $y \leftrightarrow z$) überein.