Mechanik II Lösungen 02

Lagrange Funktion und Euler-Lagrange Gleichungen

1. Bewegung im Schwerefeld entlang einer beliebigen Kurve

   (a) In kartesischen Koordinaten lautet die Lagrangefunktion

   $$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \ . \tag{1}$$

   Mit $q = x$ als "verallgemeinerte" unabhängige Koordinate gilt

   $$x(q) = q \quad , \quad y(q) = f(q) \quad , \quad \dot{y} = f'(q)\dot{q} \ , \tag{2}$$

   und daher

   $$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \tfrac{1}{2}m(1 + f'(q)^2)\dot{q}^2 - mgf(q) \ . \tag{3}$$

   (b) Für die Euler-Lagrange Gleichung benötigen wir

   $$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} &= m\frac{d}{dt}((1 + f'^2)\dot{q}) \\ &= m(1 + f'^2)\ddot{q} + 2mf'f''\dot{q}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} &= mf'f''\dot{q}^2 - mgf' \end{aligned} \tag{4}$$

   Die Euler-Lagrange Gleichung lautet daher

   $$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad m(1 + f'^2)\ddot{q} + mf'f''\dot{q}^2 = -mgf' \\ &\Leftrightarrow \quad \ddot{q} = -\frac{gf' + f'f''\dot{q}^2}{1 + f'^2} \end{aligned} \tag{5}$$

   und diese Gleichung für $q(t) = x(t)$ ist identisch mit der in Übungen 01.1(d) hergeleiteten Bewegungsgleichung für $x(t)$.

2. Ebenes Pendel im Schwerefeld

   Die Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten lautet (wie im Beispiel oben)

   $$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \ . \tag{6}$$

   Mit (x_P, y_P) die Koordinaten des Aufhängepunkts ist eine geeignete Transformation auf die unabhängige Winkelvariable $q = \varphi$ durch

   $$x(\varphi) = x_P + \ell \sin\varphi \qquad y(\varphi) = y_P - \ell\cos\varphi \tag{7}$$

   gegeben.

(a) Für $(x_P, y_P) = (0, 0)$ erhält man die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}^{(a)}(\varphi, \dot{\varphi}) = \tfrac{1}{2} m\ell^2 \dot{\varphi}^2 + mg\ell \cos\varphi \ . \tag{8}$$

Diese führt auf die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} + (g/\ell)\sin\varphi = 0 \ . \tag{9}$$

(b) Für $(x_P(t) = A\cos\Omega t, y_P = 0)$ erhält man die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}^{(b)}(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \mathcal{L}^{(a)}(\varphi, \dot{\varphi}) + \tfrac{1}{2} mA^2\Omega^2 \sin^2\Omega t - Am\Omega\ell \sin\Omega t \dot{\varphi}\cos\varphi \ . \tag{10}$$

Der erste Zusatzterm hängt zwar explizit von der Zeit ab, nicht aber von $\varphi(t)$ oder $\dot{\varphi}(t)$, trägt also zu den Euler-Lagrange Gleichungen nicht bei und kann weggelassen werden. Dann hat man

$$\mathcal{L}^{(b)}(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \tfrac{1}{2} m\ell^2 \dot{\varphi}^2 + mg\ell\cos\varphi - Am\Omega\ell \sin\Omega t \dot{\varphi}\cos\varphi \ . \tag{11}$$

Der zusätzliche Term führt (nach Division durch $m\ell^2$) zu den modifizierten Gleichungen

$$\ddot{\varphi} + (g/\ell)\sin\varphi = (A\Omega^2/\ell)\cos\Omega t\cos\varphi \ . \tag{12}$$

Für kleine Auschläge, $\sin\varphi \approx \varphi, \cos\varphi \approx 1$ reduziert sich diese Gleichung auf die einer erzwungenen harmonischen Schwingung,

$$\ddot{\varphi} + (g/\ell)\varphi = (A\Omega^2/\ell)\cos\Omega t \ . \tag{13}$$

(c) Für $(x_P = 0, y_P(t) = A\cos\Omega t)$ erhält man (wieder bis auf Terme die nicht zu den Bewegungsgleichungen beitragen) die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}^{(c)}(\varphi, \dot{\varphi}, t) = \tfrac{1}{2} m\ell^2 \dot{\varphi}^2 + mg\ell\cos\varphi - Am\Omega\ell \sin\Omega t \dot{\varphi}\sin\varphi \ . \tag{14}$$

Diese führt auf

$$\ddot{\varphi} + (g/\ell)\sin\varphi = (A\Omega^2/\ell)\cos\Omega t\sin\varphi \ . \tag{15}$$

Für kleine Auschläge reduziert sich diese Gleichung auf die eines harmonischen Oszillators mit zeitabhänginger Frequenz,

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi} + \omega(t)^2\varphi = 0 \\ &\omega(t)^2 = g/\ell - (A\Omega^2/\ell)\cos\Omega t \end{aligned} \tag{16}$$

(Dieses Ergebnis ist leicht intuitiv zu verstehen: die oszillierende vertikale Beschleunigung simuliert ein periodisch schwankendes Gravitationsfeld ...).

(Mehr Bemerkungen zu dieser Aufgabe in der Vorlesung.)