

MECHANIK II LÖSUNGEN 03

EULER-LAGRANGE GLEICHUNGEN, ROTIERENDES BEZUGSSYSTEM

1. ZWEI WICHTIGE EIGENSCHAFTEN DER EULER-LAGRANGE GLEICHUNGEN

(a) "Eichinvarianz"

Mit

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}(q, t) = \sum_a \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q^a} \dot{q}^a + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \frac{d}{dt} \mathcal{F}(q, t) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q^a} \quad (1)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^a} = \frac{\partial}{\partial q^a} \frac{d}{dt} \quad (2)$$

(dies folgt daraus dass

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_b \dot{q}^b \frac{\partial}{\partial q^b} + \dots \quad (3)$$

eine Summe von Operatoren ist die jeder für sich mit $\partial/\partial q^a$ kommutieren) sieht man dass

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{\partial}{\partial q^a} \frac{d}{dt} \right) \frac{d}{dt} \mathcal{F} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q^a} \mathcal{F} - \frac{\partial}{\partial q^a} \frac{d}{dt} \mathcal{F} \equiv 0 \quad (4)$$

identisch erfüllt ist, der Term $(d/dt)\mathcal{F}$ also keinen Beitrag zu den Euler-Lagrange Gleichungen liefert.

(b) "Forminvarianz" oder "Koordinateninvarianz"

Mit

$$q^a = q^a(\bar{q}^b, t) \Rightarrow \dot{q}^a = \sum_b \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^b} \dot{\bar{q}}^b + \frac{\partial q^a}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{\bar{q}}^b} = \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^b} \quad (5)$$

und

$$\bar{\mathcal{L}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \mathcal{L}(q(\bar{q}, t), \dot{q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), t) \quad (6)$$

und der Identität (2) (für $\bar{q}^b$ anstelle von q^a) hat man (Summation über a)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\bar{q}}^b} - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{q}^b} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} \frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{\bar{q}}^b} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^a} \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^b} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} \frac{\partial}{\partial \bar{q}^b} \dot{q}^a \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^b} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^a} \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^b} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} \frac{\partial}{\partial \bar{q}^b} \frac{d}{dt} q^a \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^a} \right) \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^b} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{q}^b} q^a - \frac{\partial}{\partial \bar{q}^b} \frac{d}{dt} q^a \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^a} \right) \frac{\partial q^a}{\partial \bar{q}^b} \end{aligned} \quad (7)$$

Da die Jacobi-Matrix (nach Annahme) invertierbar ist, folgt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\bar{q}}^a} - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \bar{q}^a} = 0 \quad \forall a \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^a} = 0 \quad \forall a \quad (8)$$

2. SCHEINKRÄFTE IN EINEM ROTIERENDEM BEZUGSSYSTEM

Aus

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \omega t - y \sin \omega t &\Rightarrow \dot{x}' &= \dot{x} \cos \omega t - \omega x \sin \omega t - \dot{y} \sin \omega t - \omega y \cos \omega t \\ y' &= x \sin \omega t + y \cos \omega t &\Rightarrow \dot{y}' &= \dot{x} \sin \omega t + \omega x \cos \omega t + \dot{y} \cos \omega t - \omega y \sin \omega t \end{aligned} \quad (9)$$

folgt einfach durch Einsetzen in

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) \quad (10)$$

dass die Lagrangefunktion im rotierenden Bezugssystem

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + m\omega(xy - y\dot{x}) \quad (11)$$

ist. Zusätzlich zu dem üblichen kinetischen Term treten hier 2 “Scheinpotentiale” auf, die zu Scheinkräften in den Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen führen,

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2m\omega \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Der Faktor 2 im letzten Term resultiert aus

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x} \right) m\omega(xy - y\dot{x}) &= -2m\omega\dot{y} \\ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial}{\partial y} \right) m\omega(xy - y\dot{x}) &= +2m\omega\dot{x} \end{aligned} \quad (13)$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung ist eine radial nach aussen gerichtete abstossende Kraft (Zentrifugalkraft), der zweite eine geschwindigkeitsabhängige und orthogonal zur Geschwindigkeit $(\dot{x}, \dot{y})$ wirkende Kraft (Corioliskraft).