Mechanik II Lösungen 04

Noether-Theorem, Galilei-Transformationen

1. Teilchen im Schwerefeld und Galilei-Transformationen

   Die Lagrange-Funktion ist

   $$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx \quad . \tag{1}$$

   Unter Galileischen Geschwindigkeitstransformationen $x \to x' = x - wt$, also $\dot{x} \to \dot{x}' = \dot{x} - w$, hat man

   $$\begin{aligned}\mathcal{L} \to \mathcal{L}' &= \tfrac{1}{2}m(\dot{x}-w)^2 - mg(x-wt) = \mathcal{L} - mw\dot{x} + \tfrac{1}{2}mw^2 + mgwt \\ &= \mathcal{L} + \frac{d}{dt}(-mwx + \tfrac{1}{2}mw^2t + \tfrac{1}{2}mgwt^2)\end{aligned} \tag{2}$$

   $\mathcal{L}$ ist also quasi-invariant. Unter der infinitesimalen Transformation $\Delta x = -\nu t$ mit $\Delta\dot{x} = -\nu$ hat man

   $$\Delta\mathcal{L} = -m\dot{x}\nu + mg\nu t = \frac{d}{dt}(-mx\nu + \frac{1}{2}mg\nu t^2) \quad . \tag{3}$$

   Daher lautet die zugehörige Erhaltungsgrösse

   $$p\Delta x - (-mx\nu + \frac{1}{2}mg\nu t^2) = m\nu(x - \dot{x}t - \tfrac{1}{2}gt^2) \equiv \nu G \tag{4}$$

   Einsetzen der allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichung $\ddot{x} = -g$,

   $$x(t) = x(0) + v(0)t - gt^2/2 \quad , \quad \dot{x}(t) = v(0) - gt \quad , \tag{5}$$

   führt auf $G = mx(0)$, was offensichtlich konstant ist und die Interpretation von G liefert.

2. Abgeschlossene Systeme und der Schwerpunktsatz

   Da die Teilchenabstände $|\vec{x}_A - \vec{x}_B|$ unter Galilei-Transformationen $\vec{x}_A \to \vec{x}_A - \vec{w}t$ invariant sind, ist offensichtlich auch das Potential $U = U(|\vec{x}_A - \vec{x}_B|)$ invariant. Für den kinetischen Term eines Teilchens hat man (wie im obigen Beispiel)

   $$\tfrac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 \to \tfrac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - m\vec{w}.\dot{\vec{x}} + \tfrac{1}{2}m\vec{w}^2 = \tfrac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + \frac{d}{dt}(-m\vec{w}.\vec{x} + \tfrac{1}{2}m\vec{w}^2t) \tag{6}$$

   und infinitesimal

   $$\Delta\vec{x} = -\vec{\nu}t \quad \Rightarrow \quad \Delta\tfrac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 = \frac{d}{dt}(-m\vec{\nu}.\vec{x}) \quad . \tag{7}$$

   Für ein Teilchen führt das zu der Erhaltungsgrösse

   $$P_\Delta = \vec{p}.\Delta\vec{x} + m\vec{\nu}.\vec{x} = \vec{\nu}.(-\vec{p}t + m\vec{x}) \equiv \vec{\nu}.\vec{G} \quad . \tag{8}$$

Für ein abgeschlossenes N-Teilchen-System mit Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \sum_{A=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_A \dot{\vec{x}}_A^2 - U(|\vec{x}_A - \vec{x}_B|) \tag{9}$$

ist also $\mathcal{L}$ quasi-invariant, und die Erhaltungsgrösse ist

$$\vec{G} = \sum_A \vec{G}_A = \sum_A (-\vec{p}_A t + m_A \vec{x}_A) \tag{10}$$

Mit dieser Beziehung lässt sich die Massenschwerpunkt-Koordinate als

$$\vec{S}(t) = \frac{\sum_A m_A \vec{x}_A(t)}{\sum_A m_A} = \frac{\sum_A \vec{p}_A}{\sum_A m_A} t + \frac{\vec{G}}{\sum_A m_A} \tag{11}$$

schreiben. Da der Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_A \vec{p}_A$ des Systems erhalten (konstant) ist, entspricht dies dem Schwerpunktsatz

$$\vec{S}(t) = \vec{V}(0)t + \vec{S}(0) \tag{12}$$

der besagt, dass sich der Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems geradlinig und gleichförmig bewegt.

3. Invarianz der Erhaltungsgrössen unter Eichtransformationen

Sei $\mathcal{L}$ quasi-invariant under der Variation Δq^a, d.h. es gibt ein $\mathcal{F}_\Delta$ so dass

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \mathcal{F}_\Delta \quad . \tag{13}$$

Dann gilt für $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + dF(q,t)/dt$ wegen $(d/dt)\Delta = \Delta(d/dt)$

$$\Delta \mathcal{L}' = \Delta \mathcal{L} + \Delta \frac{d}{dt} F = \frac{d}{dt}(\mathcal{F}_\Delta + \Delta F) \equiv \frac{d}{dt} \mathcal{F}'_\Delta \quad , \tag{14}$$

mit

$$\Delta F(q,t) = \frac{\partial F}{\partial q^a} \Delta q^a \quad . \tag{15}$$

Also ist auch $\mathcal{L}'$ quasi-invariant. Die zugehörige Erhaltungsgrösse

$$P'_\Delta = p'_a \Delta q^a - \mathcal{F}'_\Delta \tag{16}$$

berechnet sich dann mit

$$p'_a = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \frac{d}{dt} F = p_a + \frac{\partial F}{\partial q^a} \equiv p_a + \partial_a F \tag{17}$$

(vgl. die Lösungen 03.1.a) zu

$$P'_\Delta = (p_a + \partial_a F)\Delta q^a - (\mathcal{F}_\Delta + \Delta F) = p_a \Delta q^a - \mathcal{F}_\Delta = P_\Delta \quad . \tag{18}$$