Mechanik II Lösungen 05

Variationsrechnung

1. Kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten auf dem Zylinder

   (a) Mit $x = R\cos\phi, y = R\sin\phi, z = z$ wird aus dem Linienelement

   $$ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)|_Z = R^2 d\phi^2 + dz^2 \quad . \tag{1}$$

   Daher ist, mit $z = z(\phi)$, die Länge

   $$L = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{R^2 d\phi^2 + dz^2} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \sqrt{R^2 + z'(\phi)^2} \tag{2}$$

   und der gesuchte Integrand

   $$F(z, z', \phi) = \sqrt{R^2 + z'(\phi)^2} = F(z') \tag{3}$$

   hängt weder von $z(\phi)$ noch explizit von ϕ ab.

   (b) Impulserhaltung oder Energieerhaltung

   $$\frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} = c_1 \quad , \quad F - z'\frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + z'^2}} = c_2 \tag{4}$$

   führen beide auf die Schraubenlinie.

   $$z'(\phi) = c \quad \Rightarrow \quad z(\phi) = z(0) + c\phi \quad . \tag{5}$$

2. Brachistochrone

   (a) Mit $y_1 = 0$ und $v_1 = v(x_1) = 0$ folgt aus Energieerhaltung

   $$mv^2/2 - mgy = mv_1^2/2 - mgy_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x) = \sqrt{2gy(x)} \tag{6}$$

   und daher, mit $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'(x)^2}$,

   $$T[y] = \int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} ds/v = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2}/\sqrt{2gy(x)} \quad . \tag{7}$$

   und daher

   $$F(y, y') = \sqrt{1 + y'(x)^2}/\sqrt{2gy(x)} \quad . \tag{8}$$

   (b) Der Integrand $F(y, y')$ hängt nicht explizit von x ab, und daher

   $$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1 + y'^2}} = C \quad \Rightarrow \quad y(1 + y'^2) = 1/(2gC^2) \tag{9}$$

(c) Die zu lösende Differentialgleichung lautet also, mit $R_0 = 1/4gC^2$,

$$y' = \sqrt{(2R_0 - y)/y} \quad \Rightarrow \quad dx = dy\sqrt{y/(2R_0 - y)} \ . \tag{10}$$

Dies kann durch den Variablenwechsel

$$y(\phi) = 2R_0 \sin^2 \phi/2 = R_0(1 - \cos\phi) \tag{11}$$

integriert werden, und führt auf

$$x(\phi) = R_0 \int d\phi(1 - \cos\phi) = R_0(\phi - \sin\phi) + x(0) \ . \tag{12}$$

Zusammen beschreiben $(x(\phi), y(\phi))$ eine Zykloide.

Bemerkung: In (10) wurde $y' > 0$ angenommen, d.h. die Kurve führt (mit unserer Vorzeichenkonvention von y) nach unten. Das ist zicherlich zunächst (nahe bei x_1) richtig, und zumindest so lange bis die Zykloide ihr Minimum, bei

$$\phi = \pi \quad \Rightarrow \quad y = 2R_0 \tag{13}$$

erreicht. Wenn dieses innerhalb des Intervalls $[x_1, x_2]$ liegt, muss die Kurve darüber hinaus (aber weiterhin als Zykloide) fortgesetzt werden. In dem Fall liegt der Endpunkt also höher als der tiefste Punkt der Zykloide (Sprungschanze mit nach oben gerichtetem Absprungwinkel ...).

Wenn wir oBdA für den Anfangspunkt $x_1 = x(\phi_1)$ sowohl $x_1 = 0$ als auch $\phi_1 = 0$ wählen, lautet die Lösung

$$x(\phi) = R_0(\phi - \sin\phi) \quad , \quad y(\phi) = R_0(1 - \cos\phi) \ . \tag{14}$$

Einzetzen des Endpunkts $(x_2 = x(\phi_2), y_2 = y(\phi_2))$ führt auf die Gleichungen

$$\frac{1}{R_0} = \frac{(\phi_2 - \sin\phi_2)}{x_2} = \frac{(1 - \cos\phi_2)}{y_2} \ , \tag{15}$$

die es jetzt (im Prinzip, oder numerisch) erlauben, R_0 und ϕ_2 als Funktionen von (x_2, y_2) zu bestimmen. Eine Sache die leicht ohne Numerik zu sehen ist, ist dass für $\phi_2 = \pi$ (also Endpunkt = Minimum) die Beziehung

$$\phi_2 = \pi \quad \Rightarrow \quad x_2 = (\pi/2)y_2 \tag{16}$$

gilt, und

$$x_2 > (\pi/2)y_2 \quad \Rightarrow \quad \phi_2 > \pi \ , \tag{17}$$

so dass in dem Fall der Endpunkt tatsächlich hinter dem Minimum der Zykloide liegt.