Mechanik II Lösungen 06

Starrer Körper: Trägheitstensor

1. Trägheitstensor eines Quaders

(a) Die Gesamtmasse M ist offensichtlich $M = \rho_0 L_1 L_2 L_3$. Wenn der Ursprung K des KS eine der Ecken des Quaders ist (so dass die anderen Ecken bei $(L_1, 0, 0), (0, L_2, 0), (0, 0, L_3), \ldots$ liegen), dann hat der Schwerpunkt die Koordinaten (hier und im Folgenden Striche an den Koordinaten aus Gründen der Lesbarkeit weggelassen, $x' \to x$)

$$x_{Si} = M^{-1}\rho_0 \int_0^{L_1} dx_1 \int_0^{L_2} dx_2 \int_0^{L_3} dx_3 \; x_i \quad , \tag{1}$$

also z.B.

$$x_{S1} = M^{-1}\rho_0 \int_0^{L_1} dx_1 \int_0^{L_2} dx_2 \int_0^{L_3} dx_3 \; x_1 = \frac{\rho_0}{\rho_0 L_1 L_2 L_3} L_2 L_3 \frac{L_2^2}{2} = \frac{1}{2} L_1 \tag{2}$$

etc., also $\vec{x}_S = (L_1/2, L_2/2, L_3/2)$, der Mittelpunkt des Quaders, wie zu erwarten war.

Der Trägheitstensor ist

$$\Theta_{ik}(K) = \rho_0 \int_0^{L_1} dx_1 \int_0^{L_2} dx_2 \int_0^{L_3} dx_3 (\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_k) \quad , \tag{3}$$

also z.B.

$$\begin{aligned} \Theta_{11}(K) &= \rho_0 \int_0^{L_1} dx_1 \int_0^{L_2} dx_2 \int_0^{L_3} dx_3 (x_2^2 + x_3^2) \\ &= \rho_0 L_1 (L_2 \frac{(L_3)^2}{3} + L_3 \frac{(L_2)^2}{3}) = \frac{1}{3} M (L_2^2 + L_3^2) \\ \Theta_{12}(K) &= \rho_0 \int_0^{L_1} dx_1 \int_0^{L_2} dx_2 \int_0^{L_3} dx_3 (-x_1 x_2) \\ &= -\rho_0 L_3 \frac{L_1^2}{2} \frac{L_2^2}{2} = -\frac{1}{4} M L_1 L_2 \end{aligned} \tag{4}$$

(b) Bezüglich ds Schwerpunkts gilt anstelle von (3)

$$\Theta_{ik}(S) = \rho_0 \int_{-L_1/2}^{L_1/2} dx_1 \int_{-L_2/2}^{L_2/2} dx_2 \int_{-L_3/2}^{L_3/2} dx_3 (\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_k) \quad , \tag{5}$$

also ist $\Theta_{ik}(S) = 0$ für $i \neq k$ ($\int_{-a}^{a} dx \; x = 0$), und z.B.

$$\Theta_{11}(S) = \rho_0 L_1 \left(2 \frac{(L_2/2)^3}{3} L_3 + 2 \frac{(L_3/2)^3}{3} L_2 \right) = \frac{1}{12} M (L_2^2 + L_3^2) \tag{6}$$

etc.

2. Satz von Steiner

(a) Wir betrachten zunächst ein System von Massenpunkten mit Ortsvektoren $\vec{x}'_A$ im Schwerpunktsystem, also mit

$$M\vec{x}'_S = \sum_A m_A \vec{x}'_A = 0 \ . \tag{7}$$

Bezüglich eines anderen Ursprungs K der im Schwerpunktsystem durch den Ortsvektor $\vec{x}'_K = \vec{a}$ gegeben ist, haben die Massenpunkte die Ortsvektoren $\vec{x}''_A$, mit

$$\vec{x}'_A = \vec{x}'_K + \vec{x}''_A \quad \Rightarrow \quad \vec{x}''_A = \vec{x}'_A - \vec{\alpha} \ . \tag{8}$$

Da wegen (7) Identitäten wie

$$\sum_A m_A \vec{x}'_A . \vec{a} = 0 \quad , \quad \sum_A m_A x'_{iA} a_k = 0 \tag{9}$$

gelten, hat man

$$\begin{aligned} \Theta_{ik}(K) &= \sum_A m_A((\vec{x}''_A)^2 \delta_{ik} - x''_{Ai} x''_{Ak}) \\ &= \sum_A m_A((\vec{x}'_A)^2 \delta_{ik} - x'_{Ai} x'_{Ak}) + \sum_A m_A(\vec{a}^2 \delta_{ik} - a_i a_k) \\ &= \Theta_{ik}(S) + M(\vec{a}^2 \delta_{ik} - a_i a_k) \end{aligned} \tag{10}$$

Für eine kontinuierliche Massenverteilung gilt analog im Schwerpunktsystem

$$\int d^3x' \ \vec{x}' \rho(\vec{x}') = 0 \quad \Rightarrow \quad \int d^3x' \ \vec{x}' . \vec{a} \ \rho(\vec{x}') = \int d^3x' \ x'_i a_k \ \rho(\vec{x}') = 0 \tag{11}$$

und daher folgt die Aussage aus der direkten Evaluation von

$$\Theta_{ik}(K) = \int d^3x' \rho(\vec{x}')((\vec{x'} - \vec{a})^2 \delta_{ik} - (x'_i - a_i)(x'_k - a_k)) \ , \tag{12}$$

Einzige Feinheit die es zu beachten gilt (daher habe ich erst das Argument für Massenpunkte gegeben) ist vielleicht, dass wir die Komponenten von $\Theta_{ik}(K)$ im Schwerpunktsystem ausrechen, und dass daher in diesem Ausdruck nicht auch gleichzeitig das Argument der Dichte verschoben wird (dies würde einer (irrelevanten) gleichzeitigen und gleichen Verschiebung des Ursprungs *und* des Körpers entprechen).

(b) Nach Aufgabe 1 ist der Ortsvektor der Ecke K im Schwerpunktsystem $\vec{a} = -(L_1/2, L_2/2, L_3/2)$. Daher gilt mit den Ergebnissen aus Aufgabe (1b) z.B.

$$\Theta_{11}(K) = \Theta_{11}(S) + M(a_2^2 + a_3^2) = \frac{1}{12} M(L_2^2 + L_3^2) + \frac{1}{4} M(L_2^2 + L_3^2) = \frac{1}{3} M(L_2^2 + L_3^2) \tag{13}$$

und $\Theta_{12}(K) = -M a_1 a_2 = -M L_1 L_2 / 4$, in Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Aufgabe (1a).