Mechanik II Lösungen 08

Poisson-Klammern und Kanonische Transformationen

1. Mechanische Eichtranformation als Kanonische Transformation

   (a) Explizit hat man

$$\bar{\mathcal{L}}(q,\dot{q},t) = \mathcal{L}(q,\dot{q},t) + \tfrac{d}{dt}F(q,t) = \mathcal{L}(q,\dot{q},t) + \tfrac{\partial F(q,t)}{\partial q^a}\dot{q}^a + \tfrac{\partial}{\partial t}F(q,t) \quad , \tag{1}$$

   oder, kurz und knapp,

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + (\partial_a F)\dot{q}^a + \partial_t F \quad . \tag{2}$$

   Daraus folgt

$$\bar{p}_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} = p_a + \partial_a F \tag{3}$$

   und

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \bar{p}_a \dot{\bar{q}}^a - \bar{\mathcal{L}} = (p_a + \partial_a F)\dot{q}^a - (\mathcal{L} + \partial_a F \dot{q}^a + \partial_t F) \\ &= p_a \dot{q}^a - \mathcal{L} - \partial_t F = H - \partial_t F \quad . \end{aligned} \tag{4}$$

   (b) Mit wiederholter Verwendung der Transformationen $\bar{q}^a = q^a$, $\bar{p}_a = p_a + \partial_a F$ und ihrer Inversen $q^a = \bar{q}^a$, $p_a = \bar{p}_a - \partial_a F$ findet man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_a} &= \frac{\partial H}{\partial p_c}\frac{\partial p_c}{\partial \bar{p}_a} = \frac{\partial H}{\partial p_a} = \dot{q}^a = \dot{\bar{q}}^a \quad \checkmark \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}^a} &= \frac{\partial H}{\partial q^c}\frac{\partial q^c}{\partial \bar{q}^a} + \frac{\partial H}{\partial p_c}\frac{\partial p_c}{\partial \bar{q}^a} - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^a} \\ &= \frac{\partial H}{\partial q^a} + \frac{\partial H}{\partial p_c}\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial q^a \partial q^c}\right) - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^c}\frac{\partial q^c}{\partial \bar{q}^a} \\ &= -\dot{p}_a - \frac{\partial^2 F}{\partial q^a \partial q^c}\dot{q}^c - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q^a} = -\frac{d}{dt}(p_a + \partial_a F) = -\frac{d}{dt}\bar{p}_a \quad \checkmark \end{aligned} \tag{5}$$

   (c)

$$\begin{aligned} \{\bar{q}^a, \bar{q}^b\}_{q,p} &= \{q^a, q^b\}_{q,p} = 0 \quad \checkmark \\ \{\bar{q}^a, \bar{p}_b\}_{q,p} &= \{q^a, p_b + \partial_b F(q,t)\} = \{q^a, p_b\} = \delta^a_b \quad \checkmark \\ \{\bar{p}_a, \bar{p}_b\}_{q,p} &= \{p_a + \partial_a F, p_b + \partial_b F\} = \{p_a, \partial_b F\} + \{\partial_a F, p_b\} \\ &= -\partial_a \partial_b F + \partial_b \partial_a F = 0 \quad \checkmark \end{aligned} \tag{6}$$

2. Teilchen im Magnetfeld und Eichtransformationen

   Unter $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi$ transformiert sich die Hamilton Funktion als

$$H(\vec{x},\vec{p}) = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{x}))^2 \quad \to \quad \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{\nabla}\Psi - e\vec{A}(\vec{x}))^2 = H(\vec{x}, \vec{p} - e\vec{\nabla}\Psi) \tag{7}$$

   und $(\vec{x},\vec{p}) \to (\vec{x}, \vec{p} - e\vec{\nabla}\Psi)$ ist eine kanonische Transformation (wie zB in Aufgabe 1c überprüft wurde: setze $F = -e\Psi$).

3. Kanonische Transformationen: Beispiele

Es muss nur $\{\bar{q}, \bar{p}\} = 1$ erfüllt sein / überprüft werden.

(a)

$$\{\bar{q}, \bar{p}\} = \{\bar{q}, p^2/2\} = p\{\bar{q}, p\} = p(\partial\bar{q}/\partial q) \stackrel{!}{=} 1 \tag{8}$$

wird durch $\bar{q}(q, p) = (q/p) + f(p)$ für eine beliebige Funktion $f(p)$ gelöst.

(b)

$$\begin{aligned} \{\bar{q}, \bar{p}\} &= \{q^a \cos bp, q^a \sin bp\} = q^a \sin bp\{\cos bp, q^a\} + q^a \cos bp\{q^a, \sin bp\} \\ &= q^a \sin bp(aq^{a-1} b \sin bp) + q^a \cos bp(aq^{a-1} b \cos bp) = abq^{2a-1} \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow \quad & a = 1/2 \quad , \quad b = 2 \end{aligned} \tag{9}$$